



AVIS IMPORTANT AUX CANDIDATS

Ce cahier d'examen est strictement personnel. Il ne doit comporter aucun signe distinctif.
Les réponses doivent être rédigées en noir ou en bleu.
Le non respect de l'une de ces recommandations peut conduire à l'attribution de la note **ZERO** à la copie.

Case à cocher si le
candidat est absent

☐

CONCOURS : Physique et chimie

EPREUVE DE : Mathématiques

DATE : 02-06-2026 à 8 H 00

DURÉE : 4 HEURES

NOM :

PRÉNOM :

DATE DE NAISSANCE :

N° de C.I.N/PASSEPORT pour les étrangers :

SÉRIE :

IDENTIFIANT :

Signature des enseignants

--	--

Signature du candidat

--

NE RIEN ÉCRIRE ICI



Concours Physique et Chimie
Épreuve de Mathématiques

Session 2026	Date : 02/06/2026	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

Feuilles de réponses

Notations :

Dans tout le problème :

- $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .
- $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On note $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ telle que } \forall x \in]0, +\infty[, t \mapsto f(t)e^{-xt} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+\}$.
- On note $F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ telle que } f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+\}$.
- Pour tout f dans E , on appelle transformée de Laplace de f qu'on la note $\mathcal{L}(f)$, la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

Dans tout le problème, on admet que :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Selon l'usage, on convient d'identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On se propose dans les parties I, II et IV d'étudier la transformation $\mathcal{L}$, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser cette transformation pour l'étude d'un opérateur. La partie III, qui est indépendante des autres parties, est consacrée à l'étude de la transformée de Laplace d'une variable aléatoire.

Partie I : Généralités et propriétés de $\mathcal{L}$

Q.1 ▷ Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Q.2 ▷ Justifier que l'application $f \mapsto \mathcal{L}(f)$ est linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, où $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Q.3 ▷ Soit $f \in F$. Montrer que $f \in E$, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x)$.

On suppose que f est dans E et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

Q.4 ▷ Montrer que f est dans F .

Q.5 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f\left(\frac{t}{a_n}\right) dt$.

Q.6 ▷ En déduire, à l'aide du théorème de la convergence dominée, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

Q.7 ▷ Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)$ au voisinage de 0^+ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Soient $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g_n(t) = t^n f(t)$.

Q.8 ▷ Pour $x > 0$, justifier l'existence d'une constante $A > 0$ telle que : $t^n e^{-xt} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$, $\forall t \geq A$.
En déduire que g_n est un élément de E .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q.9 ▷ Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, puis exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa dérivée n -ième $(\mathcal{L}(f))^{(n)}$ en fonction de $\mathcal{L}(g_n)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.10 ▷ Dans cette question, on suppose que $f(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathcal{L}(g_n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$.

Q.11 ▷ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

► Justifier que $P \in E$.

► Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si pour tout $x \in]\alpha, +\infty[$, $\mathcal{L}(P)(x) = 0$, alors $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Partie II : Étude d'un exemple

Dans cette partie, on pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}$.

Q.12 ▷ Justifier que f se prolonge par continuité en 0. On note encore f le prolongement obtenu.

Q.13 ▷ Calculer les intégrales suivantes : $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$, $I_2 = \int_0^{+\infty} t e^{-xt} dt$, $x \in]0, +\infty[$.

Q.14 ▷ Prouver que pour tout $x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} t e^{-(n+1+x)t} dt$.

Q.15 ▷ Montrer alors que $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

Partie III : Transformée de Laplace d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On définit la transformée de Laplace de la variable X , lorsqu'elle existe, par la fonction de la variable réelle t , $\mathcal{L}_X : t \mapsto E(e^{tX})$ où $E(e^{tX})$ est l'espérance de la variable aléatoire e^{tX} .

A- Cas des variables aléatoires discrètes finies

On suppose que l'univers Ω est fini. On considère X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$, $r \in \mathbb{N}^*$ avec $x_1, \dots, x_r$ des réels deux à deux distincts.

On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^r e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Q.16 ▷ Calculer $\mathcal{L}_X$ lorsque X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre p , $p \in [0, 1]$.

Q.17 ▷ Montrer que $\mathcal{L}_X$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{L}_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n.$$

Q.18 ▷ En déduire que $\mathcal{L}_X$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_X^{(n)}(0) = E(X^n)$.

Q.19 ▷ Pour tout entier $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $x_i \in X(\Omega)$, on note h_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_i(t) = e^{tx_i}$. On admet que la famille $(h_1, \dots, h_r)$ est libre. Montrer que deux variables aléatoires discrètes finies X et Y suivent la même loi, si et seulement si, pour tout réel t , $\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{L}_Y(t)$.

Q.20 ▷ Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors pour tout réel t , $\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t)\mathcal{L}_Y(t)$.

[illegible]

Q.21 ▷ Dédurre $\mathcal{L}_X$ lorsque X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(s, p)$ de paramètres s et p , $s \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

B- Cas des variables aléatoires discrètes infinies

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $D_X = \{t \in \mathbb{R}, E(e^{tX}) \text{ est finie}\}$ et on rappelle que pour tout $t \in D_X$,

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} \mathbb{P}(X = n).$$

On admet que les résultats démontrés dans les questions Q.18, Q.19 et Q.20 restent vrais dans le cas des variables aléatoires discrètes infinies.

Q.22 ▷ Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ , $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que $D_Y = \mathbb{R}$ puis calculer $\mathcal{L}_Y(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q.23 ▷ Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X en fonction de $\mathcal{L}'_X(0)$ et $\mathcal{L}''_X(0)$.

Q.24 ▷ En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

Q.25 ▷ On considère X et Y deux variables aléatoires telles que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et que X et Y sont indépendantes. Justifier que $D_{X+Y} = \mathbb{R}$ puis déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

NE RIEN ECRIRE ICI

Partie IV : Une utilisation de la transformation $\mathcal{L}$

A- Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on note :

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

Q.26 $\triangleright$ Justifier que, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ converge.

Q.30 ▷ Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $t \in \mathbb{R}$, on a : $\Phi(P)(t) = e^t(te^{-t}P'(t))'$.
 Dédire que pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = \langle P, \Phi(Q) \rangle.$$

Q.31 ▷ Montrer que les sous-espaces propres de Φ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Q.32 ▷ Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Prouver que si P est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-k$, alors $\deg(P) = k$.

B- Vecteurs propres de Φ

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_k) : \quad x(1-x)y' + (k+1-x)y = 0.$$

Q.33 ▷ Résoudre l'équation $(\mathcal{E}_k)$ sur $]1, +\infty[$.

Soit P un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-k$.

Q.34 ▷ Vérifier que pour tout $t \geq 0$, $(1-t)P'(t) + tP''(t) + kP(t) = 0$.

Q.35 ▷ Prouver alors que pour tout $x > 0$, $\mathcal{L}(tP'')(x) + \mathcal{L}(P')(x) - \mathcal{L}(tP')(x) + k\mathcal{L}(P)(x) = 0$,
où $\mathcal{L}$ est la transformée de Laplace définie au début du problème.

Q.36 ▷ Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$(1) \quad \mathcal{L}(tP')(x) = -\mathcal{L}(P)(x) - x(\mathcal{L}(P))'(x).$$

$$(2) \quad \mathcal{L}(tP'')(x) = -\mathcal{L}(P')(x) - x\mathcal{L}(P)(x) - x^2(\mathcal{L}(P))'(x).$$

Q.37 ▷ En déduire que $\mathcal{L}(P)$ est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation $(\mathcal{E}_k)$.

On considère la fonction f_k définie sur $]1, +\infty[$ par : $f_k(x) = \frac{(x-1)^k}{x^{k+1}}$.

Q.38 ▷ Justifier que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\mathcal{L}(P)(x) = \beta f_k(x)$, où β est une constante réelle.

Q.39 ▷ Vérifier que $f_k(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{C_k^i}{x^{i+1}} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{i!} C_k^i \frac{i!}{x^{i+1}}, \forall x \in]1, +\infty[.$

Q.40 ▷ Montrer, en utilisant la question Q.10, que pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$f_k(x) = \mathcal{L}(Q_k)(x), \text{ où } Q_k(X) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{i!} C_k^i X^i.$$

Q.41 ▷ Conclure, à l'aide de la question Q.11, que $E_{-k}(\Phi) = \text{vect}(Q_k)$, où $E_{-k}(\Phi)$ est le sous-espace propre de Φ associé à la valeur propre $-k$ et $\text{vect}(Q_k)$ est le sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par le polynôme Q_k .

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note φ_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi_k(t) = t^k e^{-t}$.

Q.42 ▷ En utilisant la formule de Leibniz, montrer que $Q_k(t) = \frac{1}{k!} e^t \varphi_k^{(k)}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, où $\varphi_k^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de φ_k .

Q.43 ▷ Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, on a :

$$\langle Q_k, Q_k \rangle = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} Q_k(t) \varphi_k^{(k)}(t) dt = \frac{(-1)^i}{k!} \int_0^{+\infty} Q_k^{(i)}(t) \varphi_k^{(k-i)}(t) dt.$$

Q.44 ▷ En déduire que

$$\langle Q_k, Q_k \rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{+\infty} Q_k^{(k)}(t) t^k e^{-t} dt.$$

Q.45 ▷ Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, vérifier que $Q_k^{(k)} = (-1)^k$, puis montrer que $\|Q_k\| = 1$.

Q.46 ▷ Prouver que la famille $B_o = (Q_0, \dots, Q_n)$ est l'unique base orthonormée de $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vérifiant pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

(i) $\Phi(Q_k) = -kQ_k$,

(ii) $Q_k(0) > 0$.

Q.47 ▷ Déterminer Q_0, Q_1 et Q_2 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

On suppose, dans la suite, que $n \geq 3$ et on note $\mathcal{P}_{\mathbb{R}_2[X]}$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Q.48 ▷ Exprimer $\mathcal{P}_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$ en fonction des polynômes Q_0, Q_1 et Q_2 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q.49 ▷ On considère l'application :

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(a, b, c) \mapsto \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t} dt.$$

Montrer que Ψ atteint son minimum en un unique triplet (a_0, b_0, c_0) de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Espace supplémentaire pour les réponses

[illegible]

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Area with horizontal dotted lines for writing.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Area with horizontal dotted lines for writing.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

★ Fin de l'épreuve ★



Concours Physique et Chimie
Épreuve de Mathématiques

Session 2026	Date : 02/06/2026	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

L'usage de la calculatrice et tout autre dispositif électronique est interdit.

Rédigez vos réponses exclusivement dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. En cas de manque de place, utilisez l'espace supplémentaire situé à la fin du cahier, en précisant le numéro de la question et en indiquant clairement dans l'espace initial que votre réponse se poursuit en annexe. Si vous détectez une erreur ou une incohérence dans l'énoncé, signalez-la impérativement sur votre copie tout en poursuivant votre travail.

Notations :

Dans tout le problème :

- $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .
- $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On note $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ telle que } \forall x \in]0, +\infty[, t \mapsto f(t) e^{-xt} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+\}$.
- On note $F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ telle que } f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+\}$.
- Pour tout f dans E , on appelle transformée de Laplace de f qu'on la note $\mathcal{L}(f)$, la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

Dans tout le problème, on admet que :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Selon l'usage, on convient d'identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On se propose dans les parties I, II et IV d'étudier la transformation $\mathcal{L}$, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser cette transformation pour l'étude d'un opérateur. La partie III, qui est indépendante des autres parties, est consacrée à l'étude de la transformée de Laplace d'une variable aléatoire.

Partie I : Généralités et propriétés de $\mathcal{L}$

Q.1 ▷ Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Q.2 ▷ Justifier que l'application $f \mapsto \mathcal{L}(f)$ est linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, où $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Q.3 ▷ Soit $f \in F$. Montrer que $f \in E$, puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x)$.

On suppose que f est dans E et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

Q.4 ▷ Montrer que f est dans F .

Q.5 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f\left(\frac{t}{a_n}\right) dt$.

Q.6 ▷ En déduire, à l'aide du théorème de la convergence dominée, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

Q.7 ▷ Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)$ au voisinage de 0^+ .

Soient $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g_n(t) = t^n f(t)$.

Q.8 ▷ Pour $x > 0$, justifier l'existence d'une constante $A > 0$ telle que : $t^n e^{-xt} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$, $\forall t \geq A$.
En déduire que g_n est un élément de E .

Q.9 ▷ Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, puis exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa dérivée n -ième $(\mathcal{L}(f))^{(n)}$ en fonction de $\mathcal{L}(g_n)$.

Q.10 ▷ Dans cette question, on suppose que $f(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.
Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathcal{L}(g_n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$.

Q.11 ▷ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

► Justifier que $P \in E$.

► Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si pour tout $x \in]\alpha, +\infty[$, $\mathcal{L}(P)(x) = 0$, alors $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Partie II : Étude d'un exemple

Dans cette partie, on pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}$.

Q.12 ▷ Justifier que f se prolonge par continuité en 0. On note encore f le prolongement obtenu.

Q.13 ▷ Calculer les intégrales suivantes : $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$, $I_2 = \int_0^{+\infty} t e^{-xt} dt$, $x \in]0, +\infty[$.

Q.14 ▷ Prouver que pour tout $x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} t e^{-(n+1+x)t} dt$.

Q.15 ▷ Montrer alors que $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

Partie III : Transformée de Laplace d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On définit la transformée de Laplace de la variable X , lorsqu'elle existe, par la fonction de la variable réelle t , $\mathcal{L}_X : t \mapsto E(e^{tX})$ où $E(e^{tX})$ est l'espérance de la variable aléatoire e^{tX} .

A- Cas des variables aléatoires discrètes finies

On suppose que l'univers Ω est fini. On considère X une variable aléatoire discrète telle que

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$, $r \in \mathbb{N}^*$ avec $x_1, \dots, x_r$ des réels deux à deux distincts.

On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^r e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Q.16 ▷ Calculer $\mathcal{L}_X$ lorsque X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre p , $p \in [0, 1]$.

Q.17 ▷ Montrer que $\mathcal{L}_X$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{L}_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n.$$

Q.18 ▷ En déduire que $\mathcal{L}_X$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_X^{(n)}(0) = E(X^n)$.

Q.19 ▷ Pour tout entier $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $x_i \in X(\Omega)$, on note h_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_i(t) = e^{tx_i}$. On admet que la famille $(h_1, \dots, h_r)$ est libre. Montrer que deux variables aléatoires discrètes finies X et Y suivent la même loi, si et seulement si, pour tout réel t , $\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{L}_Y(t)$.

Q.20 ▷ Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors pour tout réel t , $\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t) \mathcal{L}_Y(t)$.

Q.21 ▷ Déduire $\mathcal{L}_X$ lorsque X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(s, p)$ de paramètres s et p , $s \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

B- Cas des variables aléatoires discrètes infinies

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $D_X = \{t \in \mathbb{R}, E(e^{tX}) \text{ est finie}\}$ et on rappelle que pour tout $t \in D_X$,

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} \mathbb{P}(X = n).$$

On admet que les résultats démontrés dans les questions Q.18, Q.19 et Q.20 restent vrais dans le cas des variables aléatoires discrètes infinies.

Q.22 ▷ Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ , $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que $D_Y = \mathbb{R}$ puis calculer $\mathcal{L}_Y(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q.23 ▷ Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X en fonction de $\mathcal{L}'_X(0)$ et $\mathcal{L}''_X(0)$.

Q.24 ▷ En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

Q.25 ▷ On considère X et Y deux variables aléatoires telles que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et que X et Y sont indépendantes. Justifier que $D_{X+Y} = \mathbb{R}$ puis déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

Partie IV : Une utilisation de la transformation $\mathcal{L}$

A- Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on note :

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

Q.26 ▷ Justifier que, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ converge.

Q.27 ▷ Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Par la suite, on munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$\|P\| = \sqrt{\langle P, P \rangle}$ la norme associée. On considère l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\Phi(P)(X) = (1 - X)P'(X) + XP''(X), \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

Q.28 ▷ Prouver que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q.29 ▷ Écrire la matrice de Φ dans la base canonique $B_C = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, puis déterminer son spectre dans $\mathbb{R}$.

Q.30 ▷ Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $t \in \mathbb{R}$, on a : $\Phi(P)(t) = e^t(te^{-t}P'(t))'$.
Déduire que pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = \langle P, \Phi(Q) \rangle.$$

Q.31 ▷ Montrer que les sous-espaces propres de Φ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Q.32 ▷ Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Prouver que si P est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-k$, alors $\deg(P) = k$.

B- Vecteurs propres de Φ

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_k) : x(1 - x)y' + (k + 1 - x)y = 0.$$

Q.33 ▷ Résoudre l'équation $(\mathcal{E}_k)$ sur $]1, +\infty[$.

Soit P un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-k$.

Q.34 ▷ Vérifier que pour tout $t \geq 0$, $(1 - t)P'(t) + tP''(t) + kP(t) = 0$.

Q.35 ▷ Prouver alors que pour tout $x > 0$, $\mathcal{L}(tP'')(x) + \mathcal{L}(P')(x) - \mathcal{L}(tP')(x) + k\mathcal{L}(P)(x) = 0$,
où $\mathcal{L}$ est la transformée de Laplace définie au début du problème.

Q.36 ▷ Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$(1) \quad \mathcal{L}(tP')(x) = -\mathcal{L}(P)(x) - x(\mathcal{L}(P))'(x).$$

$$(2) \quad \mathcal{L}(tP'')(x) = -\mathcal{L}(P')(x) - x\mathcal{L}(P)(x) - x^2(\mathcal{L}(P))'(x).$$

Q.37 ▷ En déduire que $\mathcal{L}(P)$ est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation $(\mathcal{E}_k)$.

On considère la fonction f_k définie sur $]1, +\infty[$ par : $f_k(x) = \frac{(x-1)^k}{x^{k+1}}$.

Q.38 ▷ Justifier que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\mathcal{L}(P)(x) = \beta f_k(x)$, où β est une constante réelle.

Q.39 ▷ Vérifier que $f_k(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{C_k^i}{x^{i+1}} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{i!} C_k^i \frac{i!}{x^{i+1}}$, $\forall x \in]1, +\infty[$.

Q.40 ▷ Montrer, en utilisant la question **Q.10**, que pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$f_k(x) = \mathcal{L}(Q_k)(x), \text{ où } Q_k(X) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{i!} C_k^i X^i.$$

Q.41 ▷ Conclure, à l'aide de la question **Q.11**, que $E_{-k}(\Phi) = \text{vect}(Q_k)$, où $E_{-k}(\Phi)$ est le sous-espace propre de Φ associé à la valeur propre $-k$ et $\text{vect}(Q_k)$ est le sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par le polynôme Q_k .

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note φ_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi_k(t) = t^k e^{-t}$.

Q.42 ▷ En utilisant la formule de Leibniz, montrer que $Q_k(t) = \frac{1}{k!} e^t \varphi_k^{(k)}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, où $\varphi_k^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de φ_k .

Q.43 ▷ Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, on a :

$$\langle Q_k, Q_k \rangle = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} Q_k(t) \varphi_k^{(k)}(t) dt = \frac{(-1)^i}{k!} \int_0^{+\infty} Q_k^{(i)}(t) \varphi_k^{(k-i)}(t) dt.$$

Q.44 ▷ En déduire que

$$\langle Q_k, Q_k \rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{+\infty} Q_k^{(k)}(t) t^k e^{-t} dt.$$

Q.45 ▷ Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, vérifier que $Q_k^{(k)} = (-1)^k$, puis montrer que $\|Q_k\| = 1$.

Q.46 ▷ Prouver que la famille $B_o = (Q_0, \dots, Q_n)$ est l'unique base orthonormée de $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vérifiant pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

- (i) $\Phi(Q_k) = -kQ_k$,
- (ii) $Q_k(0) > 0$.

Q.47 ▷ Déterminer Q_0, Q_1 et Q_2 .

On suppose, dans la suite, que $n \geq 3$ et on note $\mathcal{P}_{\mathbb{R}_2[X]}$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Q.48 ▷ Exprimer $\mathcal{P}_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$ en fonction des polynômes Q_0, Q_1 et Q_2 .

Q.49 ▷ On considère l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (a, b, c) &\mapsto \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Montrer que Ψ atteint son minimum en un unique triplet (a_0, b_0, c_0) de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

★ Fin de l'épreuve ★

