



AVIS IMPORTANT AUX CANDIDATS

Ce cahier d'examen est strictement personnel. Il ne doit comporter aucun signe distinctif.
Les réponses doivent être rédigées en noir ou en bleu.
Le non respect de l'une de ces recommandations peut conduire à l'attribution de la note ZERO à la copie.

Case à cocher si le
candidat est absent.

☐

CONCOURS : Physique et chimie

EPREUVE DE : Physique

DATE : 08-06-2026 à 8 H 00

DURÉE : 4 HEURES

NOM :

PRÉNOM :

DATE DE NAISSANCE :

N° de C.I.N/PASSEPORT pour les étrangers :

SÉRIE :

IDENTIFIANT :

Signature des enseignants

--	--

Signature du candidat

--

NE RIEN ÉCRIRE ICI



Concours Physique et Chimie

Epreuve de Physique

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Date : 08 juin 2026

Heure : 8 H00

Durée : 4 H

- Cette épreuve comporte 36 pages.
- Il n'est fourni au candidat qu'une seule et unique copie qui doit être rendue à la fin de l'épreuve même sans réponses.
- L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.
- L'épreuve comporte, en plus du QCM, quatre parties pouvant être traitées de façon indépendante.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat.
- Les résultats numériques sans unité ou avec une unité fautive ne seront pas comptabilisés.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Si l'espace réservé à une réponse ne suffit pas, utilisez les deux pages supplémentaires à la fin de l'épreuve en précisant le numéro de la question.

Données :

Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits : $R = N_A k_B = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	Masse de l'électron : $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$	Constante de Planck : $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$\text{rot}(\text{rot } \vec{w}) = \text{grad}(\text{div } \vec{w}) - \Delta \vec{w}$ $\text{div}(f \vec{w}) = \vec{w} \cdot \text{grad } f + f \text{div } \vec{w}$	Si $x \ll 1$: $(1+x)^a \approx 1 + ax$
$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$	
Dérivée particulière : $\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) G$	$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$	$\sum_{p=0}^{\infty} x^p = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } x < 1$

QCM

Cocher la ou les cases correspondantes aux bonnes réponses

Q1. Le rendement de Carnot d'un moteur thermique s'écrit : ☐ $\eta = \frac{T_c}{T_f} - 1$ ☐ $\eta = 1 - \frac{T_c}{T_f}$ ☐ $\eta = \frac{T_f}{T_c} - 1$ ☐ $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}$	
Q2. L'efficacité thermique d'une pompe à chaleur en fonctionnement réversible s'écrit : ☐ $e_T = \frac{T_c}{T_c - T_f}$ ☐ $e_T = \frac{T_f}{T_c - T_f}$ ☐ $e_T = \frac{T_c - T_f}{T_f}$ ☐ $e_T = \frac{T_c - T_f}{T_c}$	
Q3. Un mur d'épaisseur L et de conductivité thermique λ possède ses faces maintenues aux températures T_0 (en $x=0$) et T_L (en $x=L$). Le transfert thermique est unidirectionnel selon l'axe Ox. En régime stationnaire : ☐ La température dans le mur $T(x)$ ne dépend pas de λ. ☐ Le flux thermique à travers la surface du mur dépend de x. ☐ $j_{th} = \lambda \frac{T_0 - T_L}{L}$. ☐ $j_{th} = 0$ puisque le régime est stationnaire.	

Q4. En mécanique de fluide, la relation de Bernoulli traduit la Conservation :

- ☐ de la quantité de mouvement.
- ☐ du débit volumique.
- ☐ de la masse totale du fluide.
- ☐ de l'énergie mécanique du fluide.

Q5. Un fluide newtonien, ayant une viscosité dynamique η et une masse volumique ρ , en écoulement laminaire dans une conduite cylindrique horizontale de longueur L , sous l'effet d'une différence de pression $\Delta P = P_e - P_s$ entre l'entrée et la sortie. Pour un débit volumique D_v constant, en introduisant la résistance hydraulique R_h telle que $\Delta P = R_h \cdot D_v$:

- ☐ La résistance hydraulique R_h est indépendante de η .
- ☐ R_h augmente si le rayon de la conduite augmente.
- ☐ La perte de charge ΔP augmente si la viscosité η augmente.
- ☐ P_s augmente si R_h augmente, à P_e constante.

Q6. Un laser He-Ne émet en continu un faisceau, de section 1 mm^2 , d'une puissance de 1 mW et de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$.

- ☐ L'amplitude du champ électrique associé est $E \approx 868 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.
- ☐ Ce laser émet environ 3×10^{13} photons chaque seconde.
- ☐ Son rendement est de 0.1% .
- ☐ Ce laser émet environ 4×10^{14} photons chaque seconde.

Q7. Soit un satellite, de masse m_s , uniquement soumis à l'attraction gravitationnelle Terrestre, se trouvant sur une orbite géostationnaire autour de la terre de masse M_T et de rayon R_T ayant une période de révolution T . On désigne par G la constante de gravitation universelle. Le rayon de la trajectoire r_0 du satellite supposé ponctuel est :

- ☐ $r_0 = R_T + h$ (h est l'altitude du satellite).
- ☐ $r_0 = \left(\frac{Gm_s T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$.
- ☐ $r_0 = \sqrt{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$.
- ☐ $r_0 = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$.

Q8. Le coefficient de diffusion du dioxyde de carbone dans l'air à 298 K est $D = 0.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. La durée de sa diffusion dans une salle de volume $V = 50 \text{ m}^3$ est de l'ordre de :

- ☐ 24 heures.
- ☐ 11 jours.
- ☐ 30 minutes.
- ☐ 1 mois.

Les cavités résonnantes sont essentielles pour de nombreuses applications en physique et en ingénierie. Dans cette épreuve nous traitons quelques exemples :

1. **Cordes vibrantes** : Les instruments de musique à cordes comme les guitares.
2. **Cavités acoustiques** : les tuyaux acoustiques où appareils à vent.
3. **Les cavités électromagnétiques utilisées dans les lasers**, comme les cavités Fabry-Pérot, permettant de maintenir et d'amplifier la lumière cohérente.
4. **Les puits quantiques : Laser à cascade quantique (QCL)**

Ces exemples montrent comment les cavités résonnantes exploitent les conditions aux limites pour contrôler les ondes et les utiliser de manière efficace dans diverses applications technologiques.

Première Partie : Corde Vibrante-Instruments à cordes.

Une corde d'instrument de musique de longueur L et de masse linéique μ_l est modélisée par un fil homogène et parfaitement souple, tendu sous l'action d'une force T_0 . En négligeant le poids et les frottements, on étudie ses petits mouvements dans le plan (Oxy) autour de la position d'équilibre.

Convention et notation :

$\vec{T}(x, t)$ est la tension exercée en M par la partie droite de la corde sur celle de gauche à l'instant t . $\overrightarrow{M_0 M} = \vec{u} = y(x, t) \vec{e}_y$: est le déplacement du point M de la corde par rapport à sa position de repos M_0 . (Figure 1)

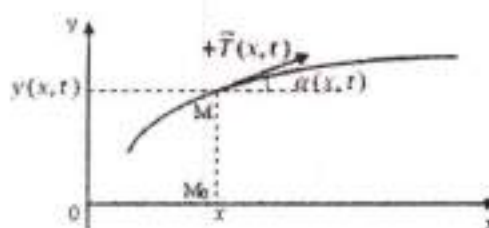


Figure 1

Les mouvements des points de la corde par rapport à leurs positions au repos sont faibles, tout comme les inclinaisons $\alpha(x, t)$, de telle manière que : $\alpha \ll 1$ et $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1$.

Q9. En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD) à l'élément du fil $dl = \overline{MM'}$, situé entre les plans d'abscisses x et $x+dx$ (Figure 2), montrer que :

$$\mu_l \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}$$

En déduire que la tension $T(x, t) = T_0$ est constante

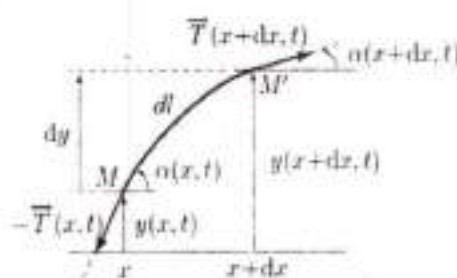


Figure 2

Q10. En déduire que $y(x, t)$ vérifie l'équation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$.

Exprimer c_c en fonction de T_0 et de μ_l et préciser sa signification physique.

Q11. Calculer c_c pour :

- Une corde de guitare de masse linéique $\mu_l = 3 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ et tendue par $T_0 = 103 \text{ N}$.
- Une corde de piano de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, de diamètre $D = 1.2 \text{ mm}$ et tendue par $T_0 = 850 \text{ N}$.

Commenter les valeurs obtenues.

Corde fixée à ses deux extrémités, modes propres

Les deux bouts de la corde sont fixés en $x = 0$ et $x = L$.

Q12. Les solutions physiquement acceptables de l'équation de D'Alembert, sont de la forme : $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \phi) \cos(kx + \psi)$. Caractériser cette onde en justifiant le choix de cette solution. Quelle est la relation entre ω et k ?

Montrer que les fréquences propres de la corde sont données par : $\nu_n = n \frac{c_c}{2L}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Exprimer les modes propres de la corde $y_n(x,t)$ en fonction de n , c_c et L .

Q13. Donner les positions des ventres et des nœuds de vibration de la corde et dessiner son aspect à des instants bien choisis pour les trois premiers modes ($n = 1, 2$ et 3).

NE RIEN ÉCRIRE ICI

La corde de guitare étudiée précédemment (voir Q11) est capable de produire une note musicale $Ré_2$ ayant une fréquence fondamentale de 147 Hz. Quelle est sa longueur ? Quelle est la longueur de la corde de piano qui émet la même note ?

Etude énergétique

Q14. Déterminer l'énergie cinétique d'un élément de la corde situé entre x et $x + dx$ et en déduire la densité linéique d'énergie cinétique $e_c = \frac{dE_c}{dx}$ de la corde en mouvement en fonction de μ et de $\frac{\partial y}{\partial t}$. L'énergie potentielle linéique de la corde est donnée par : $e_p(x, t) = \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$, exprimer la densité linéique d'énergie mécanique associée au mouvement de cette corde.

La corde vibre dans le mode propre n défini par $y_n(x, t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c_v t}{L} + \phi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Montrer que l'énergie totale de la corde dans ce mode s'écrit : $E_n = n^2 a_n^2 \frac{\pi^2}{4L} T_0$. Cette énergie est quantifiée (discrète). Quelle est la cause physique de cette quantification ?

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Prise en compte des dissipations

En tenant compte des frottements que la corde rencontre pendant son déplacement, un élément dl de cette dernière est soumis à une force de frottement : $d\vec{F}_f = -h \frac{\partial y}{\partial t} dl \vec{e}_y$, où h est une constante positive.

Q15. Montrer que l'équation de propagation de la déformation $y(x,t)$ devient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad \text{où } a \text{ est une constante à exprimer en fonction de } h \text{ et } T_0.$$

En notation complexe l'équation précédente a pour solution : $\underline{y}(x,t) = \underline{A} e^{i(\omega t - kx)}$ où $\underline{A}$ et $\underline{k}$ sont complexes. Etablir la relation de dispersion $\underline{k}^2 = f(\omega)$.

Dans le cas de faible amortissement $c_c^2 h \ll T_0 \omega$, montrer que : $\underline{k} \approx \pm \frac{\omega}{c_c} \left(1 - i \frac{c_c^2 h}{2T_0 \omega} \right)$.

Déduire l'expression réelle de $y(x, t)$ pour $k \approx \frac{\omega}{c_c} \left(1 - i \frac{c_c^2 k}{2\gamma_0 \omega} \right)$ et $\underline{A} = A e^{i\psi}$. Caractériser cette onde.

Deuxième Partie : Cavités acoustiques : physique des instruments à vent

Dans cette partie, on s'intéresse à la propagation d'ondes sonores dans l'air contenu dans une cavité possédant la symétrie de révolution autour de l'axe Ox . L'air est assimilé à un gaz parfait non visqueux, de masse molaire M , sa masse volumique est ρ , en mouvement dans un référentiel terrestre supposé galiléen : $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ muni d'une base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On désigne par $\vec{v}(M, t)$ le champ de vitesses à un instant t , en un point M de l'espace de vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Q16. Etablir l'équation d'Euler en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide dans le référentiel $\mathcal{R}$. Donner la signification de chacun des termes de cette équation.

Q17. Donner l'équation de continuité qui relie les champs de vitesse à la masse volumique du fluide, traduisant localement le principe de conservation de la matière. Déduire que pour un écoulement incompressible $\text{div}(\vec{v}) = 0$.

La pression P_0 et la masse volumique ρ_0 caractérisent l'état de repos de l'air. Lorsqu'une onde sonore, se propageant suivant l'axe Ox , traverse ce fluide, cet état est perturbé et la pression devient $P(x,t) = P_0 + \pi(x,t)$; la masse volumique : $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$, la vitesse particulière est $\vec{v}(M,t) = v(x,t)\vec{u}_x$.

Q18. Décrire ce que signifie l'approximation acoustique. Ensuite, linéariser l'équation de conservation de la masse et l'équation d'Euler.

En utilisant la même approximation, simplifier l'expression du coefficient de compressibilité isentropique $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s$ et déduire une relation linéaire entre $\pi(x,t)$ et $\mu(x,t)$.

Q19. Trouver l'équation aux dérivées partielles que satisfait la surpression $\pi(x,t)$ et déterminer la vitesse de propagation c , des ondes acoustiques en fonction des paramètres donnés.

Q20. Quelle est l'équation de propagation associée à la vitesse $v(x, t)$? Donner la forme générale de sa solution et la caractériser.

Q21. On rappelle que, pour un gaz parfait subissant une transformation isentropique, la pression P et le volume V de ce gaz sont reliés par la relation : $PV^\gamma = \text{constante}$ où $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ est le rapport des capacités thermiques à pression constante C_p et à volume constant C_v de ce gaz.

Exprimer le coefficient χ_s en fonction de γ et P_0 . En déduire l'expression de la célérité c_s des ondes acoustiques dans ce gaz parfait en fonction de sa température à l'équilibre T , sa masse molaire M , γ et R .

Calculer c_s dans le cas de l'air supposé comme un gaz parfait à la température $T = 20^\circ\text{C}$ sachant que $\gamma = 1.4$ et $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Étude acoustique des milieux limités et impédance.

On considère une cavité d'air, sous forme d'un tuyau cylindrique d'axe Ox , de section S et de longueur L , où se propage une onde sonore définie par : $\pi(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}$ où A et B sont deux constantes réelles, $\vec{k} = k \vec{u}_x$ est le vecteur d'onde et ω sa pulsation.

Pour une onde plane progressive dans le sens des x croissants, on définit l'impédance caractéristique du tuyau par la relation : $Z_c = \frac{\pi(x,t)}{S \cdot v(x,t)}$.

Q22. Quelle est la signification physique du produit $S \cdot v(x,t)$? Dédurre l'expression de l'impédance acoustique Z_c en fonction de ρ_0 , S et c_s .

Q23. On définit l'impédance acoustique Z_x en un point d'abscisse x par : $Z_x = \frac{\pi(x,t)}{S \cdot v(x,t)}$.

Montrer que : $Z_0 = Z_c \frac{Z_L \cos(kL) + i Z_c \sin(kL)}{Z_c \cos(kL) + i Z_L \sin(kL)}$, où Z_0 et Z_L sont les valeurs de Z_x respectivement en $x=0$ et $x=L$. Que devient Z_0 si Z_L tend vers l'infini ? puis vers zéro ?

Étude des conditions aux limites : tuyaux ouverts et semi-fermés.

On considère deux instruments de musique, la flûte et la clarinette, assimilés à un tuyau sonore délimité par les plans $x = 0$ et $x = L$.

Pour ces deux instruments, l'extrémité située en $x = L$ est ouverte, ce qui impose une impédance acoustique nulle. La différence apparaît en $x = 0$: l'extrémité d'entrée de la flûte est considérée comme ouverte, tandis que celle de la clarinette se comporte comme un obstacle rigide ($Z_L \rightarrow \infty$).

Q24. Déterminer les fréquences propres de la flûte. Que vaut alors l'impédance acoustique en $x = 0$ pour la clarinette ? En déduire les fréquences propres de cet instrument.

Q25. Quelle est la nature de l'onde qui s'établit à l'intérieur des deux instruments ? Préciser les conditions aux limites vérifiées par la surpression π aux extrémités $x=0$ et en $x=L$ pour chacun des instruments. Représenter graphiquement l'allure de la surpression π le long du tuyau pour les deux premiers modes propres de chaque instrument.

[illegible]

Q26. Sur la clarinette, on ouvre un trou situé à une distance d'environ $\frac{L}{3}$ de l'extrémité $x = 0$.

Expliquer l'effet de cette ouverture sur l'onde sonore et donner l'expression de la nouvelle fréquence fondamentale émise.

.....

Q27. Calculer la longueur d'une flûte permettant d'émettre une fréquence fondamentale de 330 Hz (note *Mi*).

À longueur égale, quel instrument, flûte ou clarinette, produit le son le plus aigu ? Comparer ensuite les différentes harmoniques émises par chacun des deux instruments.

Troisième partie : Cavité Electromagnétique.

Deux conducteurs parfaits plans et parallèles, situés respectivement en $x = 0$ et $x = L$, forment une cavité à une dimension sans perte d'axe Ox et de longueur L . On suppose qu'à l'intérieur de cette cavité (vide de toute charge et courant) règne une onde électromagnétique dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(x, t) = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z + E_r e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_z$.

Q28. Donner les équations de Maxwell dans la cavité.

Etablir l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$ et en déduire la relation de dispersion dans cette cavité.

- Q29.** En tenant compte des conditions aux limites imposées par la présence d'un conducteur parfait en $x = 0$ et $x = L$, exprimer $\vec{E}_x$ en fonction de E_0 et déduire les fréquences propres ν_n de cette onde, on exprimera ces fréquences en fonction de l'entier naturel non nul n et d'une fréquence ν_1 (que l'on exprimera en fonction de L et de la célérité c de l'onde).

- Q30.** Déterminer l'intervalle de fréquences $\Delta \nu_c$ entre deux modes successifs de la cavité. Faire l'application numérique pour $L = 30 \text{ cm}$.

A quel mode (valeur de n) correspond la longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$ du laser Hélium-Néon ? Préciser sa couleur.

- Q31.** Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}_x(x, t)$ correspondant au mode propre d'ordre n dans la cavité en fonction de E_0 , n , x , t , L et c . Caractériser cette onde. Déterminer les positions des nœuds du champ électrique $\vec{E}_0$ en fonction de la longueur d'onde λ .

Q32. Représenter, sur le même graphe (avec $0 \leq x \leq L$), les amplitudes en fonction de x des trois premiers modes. Comparer avec les modes propres de vibration d'une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités (voir Q12 et Q13).

Cavité résonnante : LASER :

Les conducteurs délimitant la cavité sont partiellement réfléchissants. On note r le facteur de réflexion en amplitude, τ le facteur de transmission en amplitude et $R = r^2$ le facteur de réflexion en intensité de chacun des conducteurs ($R < 1$). On suppose, qu'une onde plane de fréquence ν prend naissance dans la cavité. Son champ électrique en $x = 0$ est $\underline{E} = E_0 \exp(i\omega t)$. Elle se propage vers l'autre conducteur, situé en $x = L$, puis se réfléchit et se transmet partiellement et successivement sur chaque conducteur (Figure 3). Les rayons émergents étant parallèles, on étudie l'intensité résultante de leurs interférences à l'infini.

Q33. Exprimer le champ électrique de la première onde transmise $\underline{E}_1(x, t)$ en $x > L$ en fonction de E_0, τ, k, ω, t et x . Donner l'expression du champ $\underline{E}_2(x, t)$ de la deuxième onde transmise en $x > L$ en fonction de $E_0, \tau, r, k, \omega, t, L$ et x . Quelle est la relation entre $\underline{E}_2(x, t)$ et $\underline{E}_1(x, t)$? Déterminer le retard de phase ϕ de $\underline{E}_2(x, t)$ par rapport à $\underline{E}_1(x, t)$.

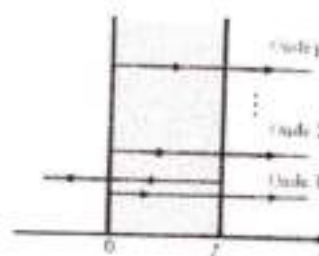


Figure 3

Q34. Exprimer finalement le champ électrique de la $p^{\text{ème}}$ onde transmise : $\underline{E}_p(x, t)$ en fonction de $\underline{E}_1(x, t)$ et des autres données. En déduire l'expression du champ électrique $\underline{E}(x, t)$, résultant de la superposition de toutes les ondes transmises pour $x > L$.

Q35. Pour obtenir une transmission maximale en $x = L$, les ondes doivent interférer de manière constructive. Quelle condition doit remplir le retard de phase φ ? En déduire l'expression des fréquences des ondes transmises avec une amplitude maximale. Que remarque-t-on en comparant ce résultat aux fréquences des modes propres de la question Q29 ?

On définit l'intensité de l'onde lumineuse par $I = \langle \underline{E} \cdot \underline{E}^* \rangle$ où $\underline{E}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{E}$.

Q36. Quelle est l'intensité I_0 de l'onde initiale : $\underline{E} = E_0 \exp(i\omega t)$? Montrer que l'intensité de l'onde émergente peut s'écrire sous la forme $I(\varphi) = \frac{I_{\max}}{1 + m \sin^2(\frac{\varphi}{2})}$. Exprimer $I_{\max}$ en fonction de R , τ et I_0 , puis m en fonction de R . Calculer la valeur de m pour $R = 0,98$.

Q37. Déterminer les valeurs du déphasage φ pour lesquelles se produisent des interférences destructives. Exprimer alors l'intensité minimale $I_{\min}$ correspondante.

Tracer l'allure de la courbe $\frac{I}{I_{\max}}$ en fonction de φ .

Q38. Au voisinage d'un maximum d'intensité (pic d'intensité), déterminer les valeurs du déphasage φ vérifiant l'équation $I(\varphi) = \frac{I_{\max}}{2}$. En déduire l'expression de la largeur à mi-hauteur $\Delta\varphi_i$ de ces pics en fonction du paramètre m , puis en donner une expression approchée dans le cas où $m \gg 1$.

Q39. En déduire la largeur spectrale à mi-hauteur $\delta\nu$ d'un pic. L'exprimer en fonction de c , L et m puis donner sa valeur pour $R = 0,98$ et $L = 30 \text{ cm}$.

Q40. Déterminer la finesse de la cavité : $F = \frac{\Delta\nu_c}{\delta\nu}$ (où $\Delta\nu_c$ l'intervalle de fréquences défini dans la question Q30). Que peut-on déduire de cette valeur concernant les modes de la cavité ?

Conséquences : nombre de modes, cohérence temporelle.

Effet Doppler.

Soit un détecteur D fixe en un point O de l'espace, une source S se déplace à la vitesse algébrique v sur un axe (Ox) (Figure 4). La source S émet un signal de période T_0 ; la célérité du signal dans le milieu qui sépare S de D est c .

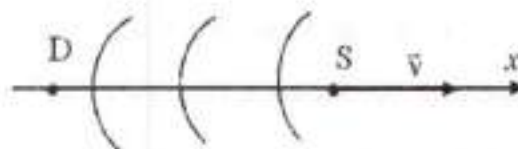


Figure 4

Q41. On s'intéresse à deux fronts d'onde consécutifs (par exemple, deux maxima) émis par la source S :

- Le premier front est émis à l'instant t_0 et reçu par le détecteur D à l'instant t .
- Le second front est émis à l'instant $t_0 + T_0$ et reçu à l'instant $t + T$.

En notant $x(t_0)$ la position de la source à l'instant t_0 , exprimer les instants de réception t et $t + T$ en fonction des données du problème.

En déduire l'expression de la période T en fonction de T_0 , V et c . En supposant que $V \ll c$, montrer que la fréquence ν mesurée par le détecteur D s'écrit au premier ordre : $\nu \approx \nu_0(1 - \frac{V}{c})$, où ν_0 est la fréquence émise par la source au repos.

Q42. Le rayonnement émis par le gaz (milieu amplificateur) présente un élargissement spectral dû principalement à l'effet Doppler thermique. Le gaz est assimilé à un gaz parfait en équilibre thermique à la température T . On s'intéresse à la composante v_x de la vitesse des molécules le long de l'axe de propagation (axe x). La probabilité $dP(v_x)$ pour qu'une molécule ait une composante de vitesse comprise entre v_x et $v_x + dv_x$, est donnée par la distribution de Maxwell-Boltzmann : $dP(v_x) = A \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2k_B T}\right) dv_x$, où k_B est la constante de Boltzmann.

En utilisant la condition de normalisation des probabilités, exprimer la constante A en fonction de m , k_B et T . (On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$).

À l'aide de l'expression de la fréquence établie précédemment (Q41), exprimer la vitesse v_x et dv_x en fonction de ν , ν_0 et c . En déduire l'expression de la probabilité $dP(\nu)$ pour que la radiation émise par une molécule ait, pour l'observateur, une fréquence apparente comprise entre ν et $\nu + d\nu$.

Q43. L'intensité spectrale mesurée par l'observateur, notée $I_\nu(\nu)$, est proportionnelle à la densité de probabilité $\frac{dP(\nu)}{d\nu}$. En déduire que cette intensité peut s'écrire sous la forme : $I_\nu(\nu) = I_{\nu m} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{a^2}\right)$ où $I_{\nu m}$ est une constante positive. Exprimer la constante a en fonction de ν_0, m, T, c et k_B . Tracer l'allure de la courbe représentative de $I_\nu(\nu)$ en précisant ses caractéristiques principales.

Q44. On caractérise la largeur $\Delta\nu_D$ de la raie spectrale, dite "largeur Doppler", par la largeur à mi-hauteur de la fonction $I_\nu(\nu)$. Exprimer $\Delta\nu_D$ en fonction de ν_0, m, T, c et k_B , puis en

fonction de λ_0 , R , M et T où M la masse molaire des atomes du milieu émetteur. Calculer $\Delta\nu_D$ pour $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$, $T = 300 \text{ K}$ et $M = 20 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- Q45.** On suppose que le laser hélium-néon ne peut émettre que les fréquences « contenues » dans la raie spectrale d'émission, c'est-à-dire appartenant à l'intervalle : $\left[\nu_0 - \frac{\Delta\nu_D}{2}, \nu_0 + \frac{\Delta\nu_D}{2} \right]$ où $\Delta\nu_D$ est la largeur Doppler (étudiée dans la question précédente). Calculer le rapport $\frac{\Delta\nu_D}{\Delta\nu_c}$ où $\Delta\nu_c$ est l'intervalle de fréquences entre deux modes propres successifs de la cavité (étudié à la question **Q30**). En déduire le nombre de modes longitudinaux qui peuvent simultanément osciller dans ce laser.

Pour que le laser n'émette qu'une seule fréquence (fonctionnement monomode), quelle doit être la longueur maximale L_m de la cavité ?

Mesure de la largeur du mode laser (Cohérence temporelle)

On suppose désormais que l'on utilise un laser rendu parfaitement monomode (émettant autour d'une fréquence centrale ν_0). On utilise un interféromètre de Michelson pour mesurer expérimentalement la largeur spectrale, notée $\Delta\nu_m$, de cet unique mode laser.

Cet appareil est constitué de :

- Deux miroirs plans réfléchissants M_1 et M_2 . Le miroir M_1 est en mouvement de translation le long de l'axe Ox ; le miroir M_2 reste fixe.
- Une lame semi-réfléchissante S_p inclinée de 45° par rapport à l'axe Ox . Cette lame est supposée infiniment mince, de coefficient de réflexion en énergie $R = 0,5$.

L'ensemble est placé dans l'air d'indice $n \approx 1$. Les positions des miroirs sont repérées par les distances $y = OO_2 = d$ et $x = OO_1 = d + e$. On notera δ la différence de marche introduite entre les deux bras de l'interféromètre.

On éclaire l'interféromètre avec un faisceau laser de lumière parallèle à l'axe Ox . En sortie, on place une lentille convergente L de manière que tous les rayons émergents se focalisent sur un photodétecteur placé au foyer image F' de L et relié à une table traçante (Figure 5).

Bien que le profil réel de ce mode soit complexe, pour simplifier l'étude analytique, on modélisera ce mode par un profil spectral d'intensité I_ν rectangulaire de largeur $\Delta\nu_m = \nu_2 - \nu_1$, centré en $\nu_0 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ (Figure 6). On notera $dI_0 = \frac{I_0}{\Delta\nu_m} d\nu$ l'intensité émise par la source dans l'intervalle de fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$.

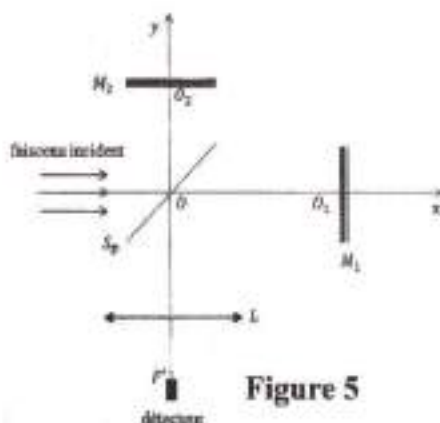


Figure 5

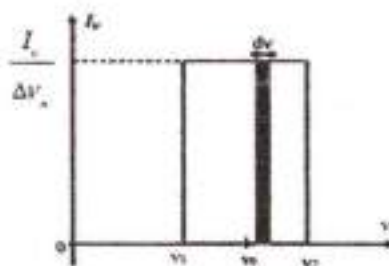


Figure 6

Q46. Exprimer l'intensité élémentaire dI reçue par le détecteur en fonction de la différence de marche δ , correspondant à l'intervalle de fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$.

En intégrant sur toute la largeur spectrale du mode, montrer que l'intensité totale I mesurée peut se mettre sous la forme : $I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \text{sinc}\left(\pi \frac{L_c}{c} \right) \cos\left(2\pi \frac{\nu_0}{c} \delta\right) \right)$.

Exprimer la longueur L_c en fonction de $\Delta\nu_m$ et de la célérité c de la lumière dans le vide, puis en fonction de la longueur d'onde moyenne λ_0 et de l'intervalle en longueur d'onde $\Delta\lambda$.

Représenter l'allure de l'interférogramme $I(\delta)$ enregistré par le détecteur dans le cas où $\Delta\nu_m \ll \nu_0$. Commenter l'évolution du contraste des franges en fonction de la différence de marche δ .

Q47. Qu'appelle-t-on la grandeur L_c ? Préciser brièvement sa signification physique. Que vaut L_c dans le cas d'une source parfaitement monochromatique ? Calculer la valeur de L_c pour un laser He-Ne de largeur spectrale $\Delta\nu_m = 3 \text{ MHz}$ et pour la lumière blanche (dont on estimera la largeur spectrale à $\Delta\nu_m \approx 400 \times 10^{12} \text{ Hz}$). Commenter ces résultats en comparant les deux sources.

En se basant sur les questions précédentes, expliquer brièvement la méthode expérimentale permettant de mesurer la largeur spectrale d'une raie lumineuse à l'aide de cet interféromètre de Michelson.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. A vertical margin line is positioned on the right side of the page. The paper appears to be from a notebook or a set of legal pads. There are no markings, text, or drawings on the page.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Quatrième Partie : Puits quantiques-Lasers à cascade quantique.

Les lasers à cascade quantique (QCL) sont des dispositifs à semi-conducteurs capables d'émettre dans l'infrarouge moyen et lointain. Les QCL renferment des hétérostructures créant des puits quantiques, où l'émission d'un photon se produit lorsqu'un électron change de niveau d'énergie à l'intérieur d'un même puits de potentiel. Cette partie propose de modéliser un puits quantique et de comprendre le principe d'émission de ces lasers.

Les hétérostructures sont constituées de superpositions de couches de semi-conducteurs de quelques nanomètres d'épaisseur. Le système est invariant par toute translation parallèle aux couches ; on prendra Ox l'axe perpendiculaire à ces couches.

Dans cette partie, on étudie un unique électron à l'intérieur de ces semi-conducteurs, de charge $-e$ et de masse m .

On considère une seule couche de semi-conducteur GaInAs comprise entre les abscisses $x=0$ et $x=L$. Pour $x<0$ et $x>L$, l'espace est rempli par le semi-conducteur AlInAs. Cette structure forme un puits quantique unidimensionnel que nous nous proposons de l'étudier (Figure 7).



Figure 7

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Dans un premier temps, on suppose que le potentiel dans le semi-conducteur AlInAs est suffisamment grand pour pouvoir le considérer comme infini, et que le potentiel dans le semi-conducteur GaInAs est fixé à zéro :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, L] \\ +\infty & \text{si } x \notin [0, L] \end{cases}$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

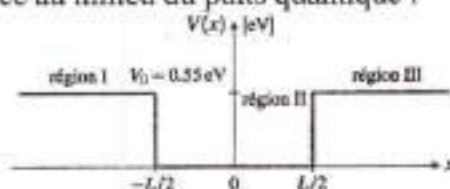
--	--

Q50. On considère des QCL dont les puits de potentiel ont une largeur comprise entre 0,5 nm et 1,5 nm. Calculer l'énergie du niveau fondamental E_1 , exprimée en électronvolts eV, dans le cas d'un puits « large » ($L = 1,5$ nm), puis d'un puits « étroit » ($L = 0,5$ nm). Commenter.

[illegible]

En fait, la différence de potentiel entre les deux semi-conducteurs est $V_0 = 0,55 \text{ eV}$. Par souci de simplicité, on modifie l'origine de l'axe Ox que l'on place au milieu du puits quantique :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } x < -\frac{L}{2} & (\text{région I}) \\ 0 & \text{si } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} & (\text{région II}) \\ V_0 & \text{si } x > \frac{L}{2} & (\text{région III}) \end{cases}$$



On cherche les états liés du puits quantique ($E < V_0$).

Q51. Résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les trois régions de l'espace, à l'intérieur et à l'extérieur du puits, en donnant la forme générale de $\phi(x)$. On posera :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ et } K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar},$$

[illegible]

Q52. Étant donné la symétrie du potentiel $V(x)$ les fonctions d'onde peuvent être choisies soit symétriques (paires), soit antisymétriques (impaires). Montrer que la fonction d'onde s'écrit alors sous l'une des deux formes suivantes, en précisant la parité associée à chaque système :

$$\begin{cases} \phi_I(x) = A_1 e^{Kx} \\ \phi_{II}(x) = A_2 \cos(Kx) \\ \phi_{III}(x) = A_3 e^{-Kx} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \phi_I(x) = A_1 e^{Kx} \\ \phi_{II}(x) = B_2 \sin(Kx) \\ \phi_{III}(x) = -A_3 e^{-Kx} \end{cases} \quad \text{où } A_1, A_2 \text{ et } B_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

Q53. En utilisant les conditions de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première aux interfaces du puits ($x = -\frac{L}{2}$ et $x = \frac{L}{2}$), déterminer les systèmes d'équations que doivent vérifier les constantes introduites dans les expressions de $\phi(x)$. On distinguera le cas des fonctions paires et des fonctions impaires.

Q54. En utilisant les systèmes d'équations précédents, et en posant $k_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$, montrer que

k doit vérifier les relations suivantes :

- Dans le cas des solutions paires :

$$\left| \cos\left(\frac{kL}{2}\right) \right| = \frac{k}{k_0} \text{ avec } \frac{2n\pi}{L} < k < \frac{(2n+1)\pi}{L} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- Dans le cas des solutions impaires :

$$\left| \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \right| = \frac{k}{k_0} \text{ avec } \frac{(2n-1)\pi}{L} < k < \frac{2n\pi}{L} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Q55. On pose la variable adimensionnée $u = \frac{L}{\pi} k$. Les solutions des équations de la question

précédente sont données par les intersections de la droite d'équation $y = \frac{\pi}{k_0 L} u$ avec les arcs de

sinusoïdes représentés sur la figure 8. Les arcs en trait plein correspondent aux fonctions d'onde paires, et les arcs en pointillés aux fonctions d'onde impaires.

Montrer qu'il n'existe qu'un seul état lié dans ce puits quantique si celui-ci possède une largeur inférieure à une valeur limite L_n , dont on donnera l'expression en fonction de V_0 , $\hbar$ et m . Faire l'application numérique.

- Q56. En exploitant la figure 8, déterminer le nombre d'états liés pour un puits « étroit » ($L = 0,5 \text{ nm}$) et pour un puits « large » ($L = 1,5 \text{ nm}$). Pour chacun de ces états, on déduira graphiquement la valeur numérique de son énergie, exprimée en eV.

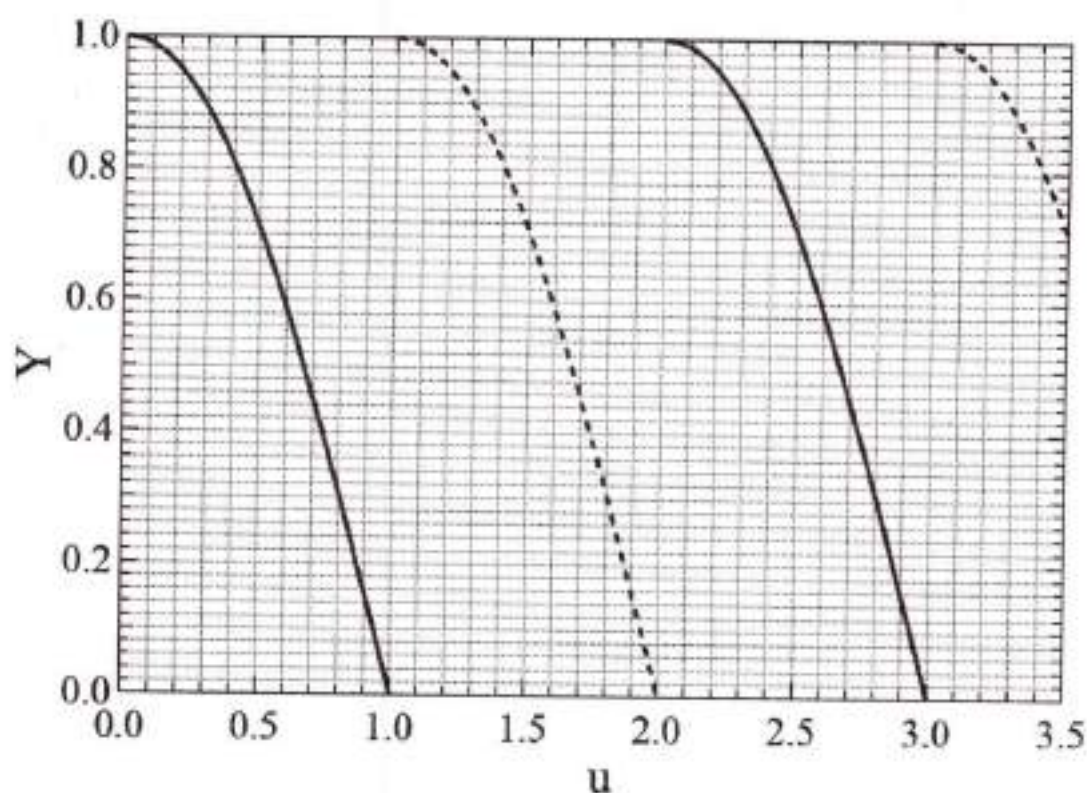


Figure 8

Q57. Tracer l'allure de la densité de probabilité de présence $|\phi(x)|^2$ pour les deux puits étudiés ($L = 0,5 \text{ nm}$ et $L = 1,5 \text{ nm}$). Commenter physiquement l'allure des courbes à l'extérieur du puits.

$L = 0,5 \text{ nm}$

$$L = 1,5 \text{ nm}$$

Q58. Pour des puits larges ($L \gg L_m$) et des niveaux d'énergie profonds ($E_n \ll V_0$), on montre que l'énergie du $n^{\text{ème}}$ état lié s'approche par $E_n \approx \left(1 - \frac{4}{k_0 L}\right) E_n$, où E_n est l'énergie de l'état lié d'un puits infini de même largeur L . Retrouver cette formule par un raisonnement semi-quantitatif : on considérera que l'existence d'ondes évanescentes rend le puits fini de largeur L équivalent à un puits infini de largeur effective L' à déterminer.

Q59. Comment justifier le fait que $E'_n < E_n$ à l'aide d'un raisonnement physique qualitatif basé sur les inégalités de Heisenberg ?

Q60. L'émission des photons laser se fait par transition entre les niveaux 3 et 2, avec une différence d'énergie $E_3 - E_2 = 0,19 \text{ eV}$. Calculer la longueur d'onde associée à cette transition. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette onde ? Commenter ce résultat au regard de l'intérêt technologique des lasers à cascade quantique étudiés dans ce problème.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Fin de l'Épreuve

