



AVIS IMPORTANT AUX CANDIDATS

Ce cahier d'examen est strictement personnel. Il ne doit comporter aucun signe distinctif.
Les réponses doivent être rédigées en noir ou en bleu.
Le non respect de l'une de ces recommandations peut conduire à l'attribution de la note ZERO à la copie.

Case à cocher si le
candidat est absent

☐

CONCOURS : Mathématiques et physique

EPREUVE DE : Physique

DATE : 08-06-2026 à 8 H 00

DURÉE : 4 HEURES

NOM :

PRÉNOM :

DATE DE NAISSANCE :

N° de C.I.N/PASSEPORT pour les étrangers :

SÉRIE :

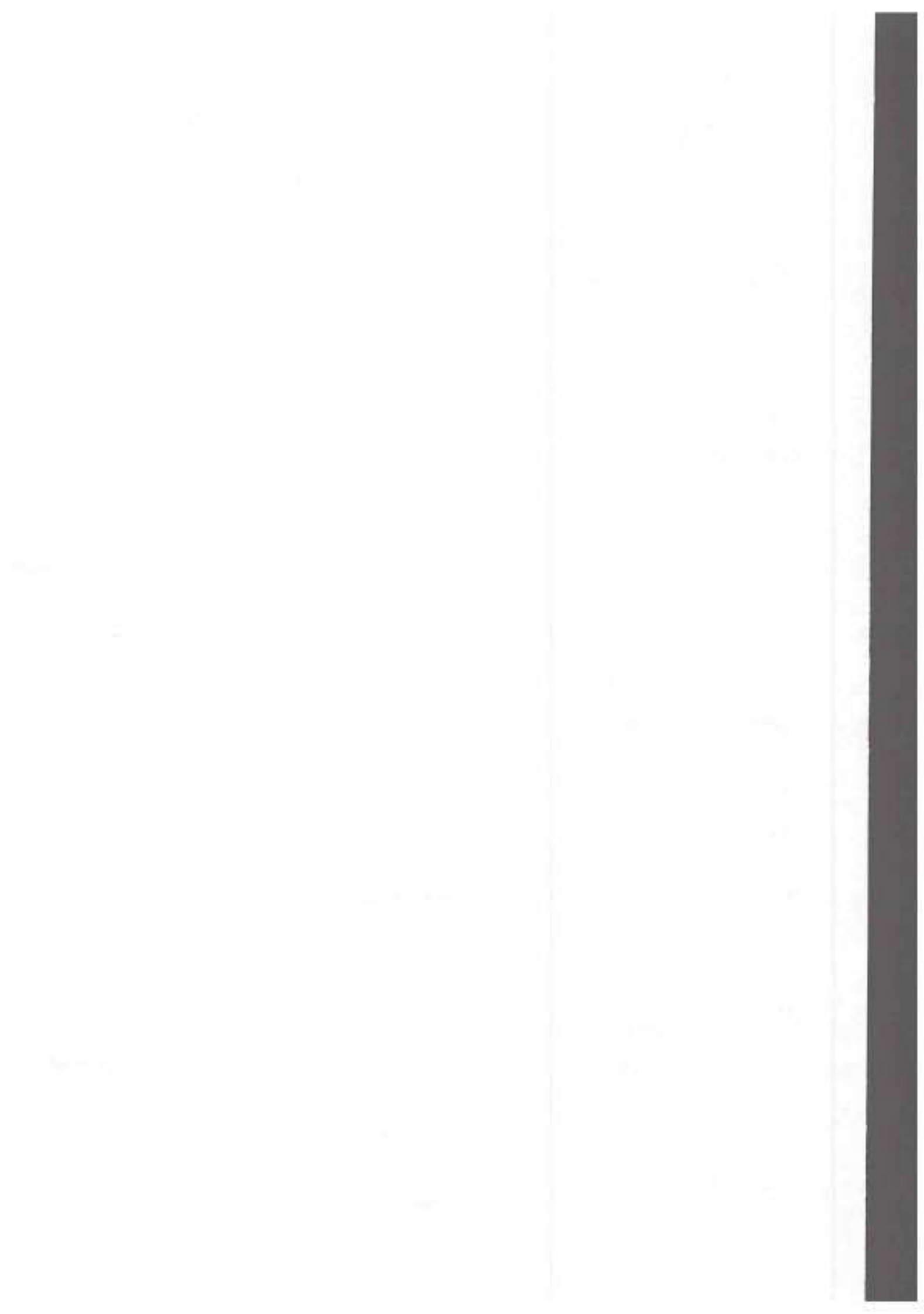
IDENTIFIANT :

Signature des enseignants

--	--

Signature du candidat

--





Concours

Mathématiques – Physique & Technologie

Epreuve de Physique

NE BIEN ÉCRIRE ICI

Date : 08 Juin 2026

Heure : 8 H00

Durée : 4 H

- Cette épreuve comporte 32 pages.
- Il n'est fourni au candidat qu'une seule copie qui doit être rendue à la fin de l'épreuve, même sans réponses.
- L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.
- L'épreuve comporte cinq parties indépendantes.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat.
- Les résultats numériques sans unité ou avec une unité fautive ne seront pas comptabilisés.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Si l'espace consacré à la réponse d'une question semble insuffisant, le candidat peut utiliser la feuille à la fin de l'épreuve en signalant le numéro de la question.

Données :

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$	$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$	$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
Constante de Planck : $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$	$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$	$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
Charge électrique élémentaire : $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
Masse d'un électron : $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$ pour $x > 0$	$\int_0^{\pi} \sin^3(\alpha) d\alpha = \frac{4}{3}$

Première Partie : Q.C.M.

Cocher la case correspondante à la bonne réponse.

Q1. Un laser émet, dans le vide, une onde plane progressive monochromatique. Ce faisceau arrive sur une section S , perpendiculaire à sa direction de propagation. La puissance moyenne transportée par ce faisceau est notée P .

On désigne par c la célérité de la lumière dans le vide et ϵ_0 la permittivité électrique du vide. L'amplitude du champ électrique associé est :

☐ $E_0 = \sqrt{\frac{2P}{\mu_0 c S}}$
☐ $E_0 = \sqrt{\frac{2P}{\epsilon_0 S}}$
☐ $E_0 = \sqrt{\frac{2P}{\epsilon_0 c S}}$
☐ $E_0 = \sqrt{\frac{P}{\epsilon_0 c S}}$

Q2. Soit un solénoïde infini d'axe $(z'z')$ et de rayon a comportant n spires par unité de longueur. Il est parcouru par un courant $i(t) = I_0 \cos(\alpha t)$. Dans l'ARQS, on admet que le champ magnétique créé en un point M à l'intérieur du solénoïde s'écrit :

$$\vec{B}(M, t) = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$$

Le champ électrique induit $\vec{E}(M, t)$ s'écrit :

☐ $\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 n I_0}{2} \cos(\alpha t) \vec{u}_\theta$
☐ $\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 n \omega I_0 r}{2} \sin(\alpha t) \vec{u}_\theta$

☐ $\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 n \omega I_0 r}{2} \sin(\alpha t) \vec{u}_r$
☐ $\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 n I_0 a^2}{2r} \cos(\alpha t) \vec{u}_\theta$

Q3. On considère une onde électromagnétique dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(x, z, t) = E_0 \cos(\alpha z) \sin(\alpha t - kx) \vec{u}_y$$

où E_0 , α et k sont des constantes réelles positives.

Le champ magnétique de cette onde est :

- ☐ $\vec{B}(x, z, t) = \frac{E_0 \alpha}{\omega} \sin(\alpha z) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$
- ☐ $\vec{B}(x, z, t) = \frac{E_0 \alpha}{\omega} \sin(\alpha z) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + \frac{k E_0}{\omega} \cos(\alpha z) \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z$
- ☐ $\vec{B}(x, z, t) = \frac{E_0 \alpha}{\omega} \sin(\alpha z) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_x + \frac{k E_0}{\omega} \cos(\alpha z) \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z$
- ☐ $\vec{B}(x, z, t) = \frac{k E_0}{\omega} \cos(\alpha z) \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z$

Q4. On considère une onde plane progressive monochromatique polarisée elliptiquement se propageant dans le vide, dont le champ électrique s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x + E_{0y} \sin(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y$$

Cette onde arrive sur un polariseur placé dans le plan $z = 0$. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire donnant la direction de transmission privilégiée du polariseur. On pose $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{u})$.

L'intensité de l'onde lumineuse à la sortie du polariseur est :

- ☐ $I_s = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c (E_{0x} \cos \alpha + E_{0y} \sin \alpha)^2$
- ☐ $I_s = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c (E_{0x}^2 \cos^2 \alpha + E_{0y}^2 \sin^2 \alpha)$
- ☐ $I_s = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c (E_{0x}^2 \cos^2 \alpha - E_{0y}^2 \sin^2 \alpha)$
- ☐ $I_s = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) \cos^2 \alpha$

Q5. Une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le vide arrive en incidence normale sur un conducteur parfait :

- ☐ L'onde réfléchie et l'onde incidente n'ont pas la même fréquence.
- ☐ La superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie ne conduit pas à une onde plane.
- ☐ Les nœuds du champ électrique se trouvent à des nombres entiers de demi-longueurs d'onde de la face métallique réfléchissante.
- ☐ Les nœuds du champ magnétique se trouvent à des nombres entiers de demi-longueurs d'onde de la face métallique réfléchissante.

Q6. On considère un réseau de diffraction comportant 500 traits/mm. Un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$ arrive en incidence normale sur le réseau.

Le nombre des tâches brillantes théoriquement observables sur un écran est :

- ☐ 7 ☐ 14 ☐ 21 ☐ 30

Q7. Un électron libre possède une énergie $E = 2,05 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$. Dans le cas non relativiste, la norme de son vecteur d'onde k vaut :

- ☐ $3,40 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$ ☐ $1,45 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-1}$ ☐ $2,32 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$ ☐ $5,12 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$

Q8. Une particule est décrite par un paquet d'ondes. Si l'incertitude sur le vecteur d'onde Δk tend vers zéro :

- ☐ La particule est parfaitement localisée ☐ La particule est au repos
- ☐ La particule est totalement délocalisée ☐ Le principe d'incertitude n'est pas respecté

Q9. On intercale une paroi plane, homogène et isotrope, de surface $S = 20 \text{ cm}^2$ et d'épaisseur $e = 5 \text{ cm}$, entre deux thermostats de températures $T_1 = 100^\circ\text{C}$ et $T_2 = 25^\circ\text{C}$. La conductivité thermique de la paroi est prise constante, égale à $0,8 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

On néglige le transfert thermique par convection et par rayonnement et on suppose que le transfert thermique effectué est unidimensionnel, perpendiculairement à la surface de la paroi. On se place en régime stationnaire.

La puissance thermique transférée à travers la paroi vaut :

- ☐ $P = 1,2 \text{ W}$ ☐ $P = 1,8 \text{ W}$ ☐ $P = 2,4 \text{ W}$ ☐ $P = 3,6 \text{ W}$

Q10. Lorsque la température d'un corps noir augmente, le maximum de son spectre d'émission :

- ☐ se décale vers les grandes longueurs d'ondes ☐ reste inchangé
☐ se décale vers les courtes longueurs d'ondes ☐ disparaît

Deuxième Partie : Capteur à induction

Les systèmes industriels comportant des pièces mécaniques en mouvement doivent être régulièrement surveillés avec précision afin de détecter des vibrations anormales ou des défauts d'alignement. Pour cela on utilise des capteurs inductifs de vibration. Un capteur est constitué :

- d'un aimant permanent solidaire à la structure vibrante,
- d'une bobine fixe d'inductance $L = 4 \text{ mH}$ et de résistance $R_b = 150 \Omega$, comportant $N = 500$ spires jointives.

Lorsque la structure oscille, l'aimant se déplace axialement devant la bobine, ce qui modifie le flux magnétique $\phi(t)$ qui la traverse (**Figure 1**).

Le flux magnétique à travers une spire peut s'écrire sous la forme :

$$\phi(t) = \phi_0 + \phi_1 \sin(\omega t)$$

Où ϕ_0 est un flux constant, $\phi_1 = 10^{-5} \text{ Wb}$ est l'amplitude de variation de flux, et $\omega = 2\pi f$ est la pulsation de la vibration.

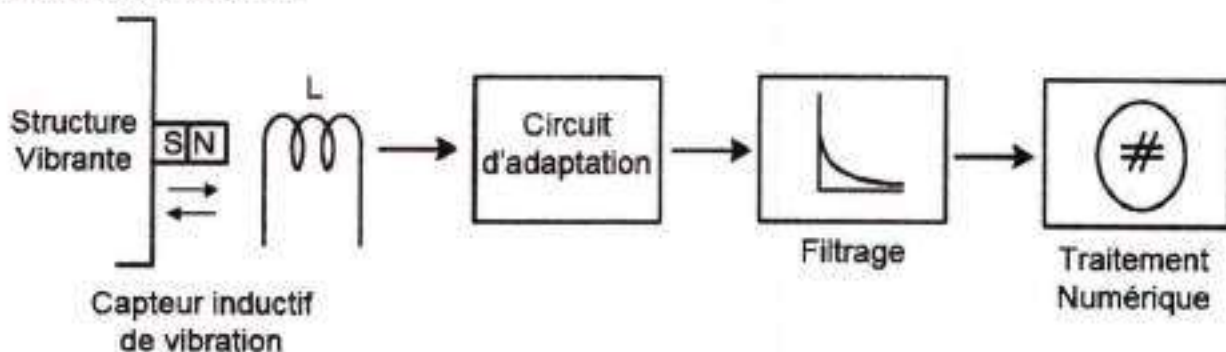


Figure 1

Q11. Montrer que la force électromotrice induite aux bornes de la bobine s'écrit sous la forme :

$$e(t) = E \cos(\omega t + \varphi)$$

Où E est son amplitude et φ sa phase initiale à déterminer. Calculer la valeur de E pour une fréquence $f = 100 \text{ Hz}$.

Que peut-on dire de la sensibilité du capteur aux vibrations rapides ?

Q12. Dans la gamme de fréquence utile $f \leq 100 \text{ Hz}$, montrer que la contribution inductive à l'impédance de la bobine est négligeable devant celle de sa résistance.

Q13. A la fréquence $f = 100 \text{ Hz}$, en supposant que la bobine est modélisée par sa résistance R_b , calculer l'intensité maximale $I_{\max}$ du courant induit dans le capteur. En déduire la puissance moyenne P_{moy} dissipée par effet Joule dans la résistance R_b .

Q14. On modélise le capteur inductif par un générateur de Thévenin, composé d'une source idéale de tension $e(t)$ et d'une résistance R_b . Il alimente un circuit de mesure modélisé par une impédance Z_e . Exprimer la tension aux bornes du circuit de mesure $v_e(t)$.

Pour $Z_{e1} = 150 \Omega$, puis pour $Z_{e2} = 10 \text{ k}\Omega$, calculer l'intensité $I_{\max}$, la puissance moyenne P_{moy} dissipée dans la résistance R_b et l'amplitude V_e de $v_e(t)$. Conclure.

Proposer un montage assurant une mesure fidèle de la tension délivrée par le capteur inductif.

Le signal électrique résultant de vibration de la structure métallique présente deux excitations harmoniques de fréquences $f_1 = 12 \text{ Hz}$ et $f_2 = 16 \text{ Hz}$, d'amplitudes $A_1 = 3,0 \text{ V}$ et $A_2 = 2,5 \text{ V}$, respectivement. Cependant, ce signal est perturbé par un parasite provenant d'éclairage, caractérisé par sa fréquence $f_p = 50 \text{ Hz}$ et son amplitude $A_p = 0,5 \text{ V}$. Le signal détecté par le capteur s'écrit alors :

$$u(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t) + A_p \cos(2\pi f_p t)$$

Pour traiter numériquement ce signal, on commence par son échantillonnage.

L'échantillonnage d'un signal analogique $s(t)$ consiste à le multiplier par un peigne de Dirac périodique $\delta_T(t)$, de période T_e et de fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T_e}$.

La décomposition en série de Fourier de ce peigne peut s'écrire sous la forme simplifiée :

$$\delta_{f_e}(t) = f_e \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(2\pi k f_e t) \right)$$

Le signal échantillonné s'écrit alors : $s_e(t) = s(t) \times \delta_{f_e}(t)$.

Q15. On considère un signal sinusoïdal : $s(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$

Etablir l'expression littérale du signal échantillonné $s_e(t)$. A partir de cette expression, identifier les fréquences et les amplitudes des raies spectrales qui composent le signal échantillonné.

Que peut-on dire de l'opération d'échantillonnage ? Justifier votre réponse.

Le signal $u(t)$ est échantillonné à une fréquence d'échantillonnage $f_e = 65 \text{ Hz}$. On note $u_e(t)$ le signal échantillonné.

Q16. En se servant des résultats obtenus précédemment, représenter le spectre du signal échantillonné $u_e(t)$ dans la gamme de fréquence $0 \leq f \leq 100 \text{ Hz}$, en indiquant clairement les fréquences et les amplitudes des raies spectrales présentes.

Expliquer pourquoi on ne peut pas reproduire le signal de vibration à partir du signal échantillonné.

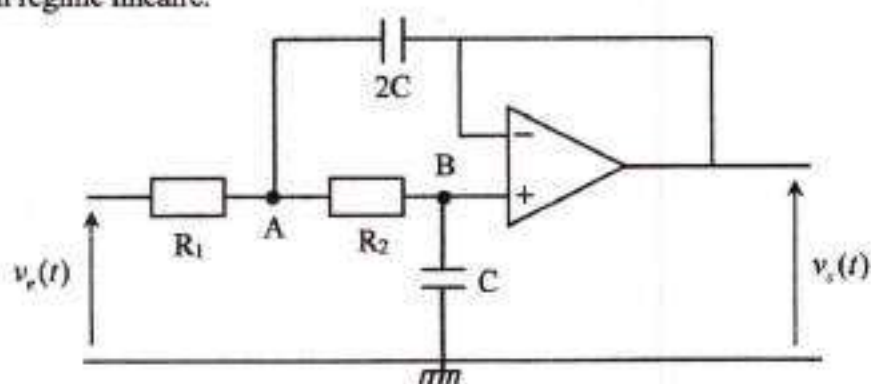


Figure 2

On suppose tout d'abord que la tension d'entrée $v_e(t)$ est fournie par un générateur de basse fréquence et s'écrit sous la forme $v_e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, où E_0 son amplitude et ω sa pulsation. La tension de sortie sera notée $v_s(t) = V_{sm} \cos(\omega t + \varphi)$, où V_{sm} désigne l'amplitude de sortie et φ le déphasage entre la tension de sortie et celle de l'entrée. En régime sinusoïdal, on utilisera les amplitudes complexes associées $\underline{V}_e = E_0$ et $\underline{V}_s = V_{sm} e^{j\varphi}$, respectivement.

Q17. Justifier que l'amplificateur opérationnel du montage de la **Figure 2** fonctionne en régime linéaire.

Q18. En effectuant une étude qualitative à basse fréquence et à haute fréquence, déterminer la nature probable de ce filtre.

Q19. Etablir l'expression de la fonction de transfert de ce filtre définie par $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ et la mettre

sous la forme suivante : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Identifier le gain statique H_0 . Montrer que la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{2R_1R_2}}$ et le facteur de qualité

$Q = \frac{\sqrt{2R_1R_2}}{R_1 + R_2}$. Quel est l'ordre du filtre étudié ? Justifier.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q20. A partir de la fonction de transfert du filtre, déterminer la pulsation de résonance ω_r et la condition sur le facteur de qualité Q pour laquelle une résonance existe. Quel est alors l'intérêt de choisir la valeur du facteur de qualité $Q = 1/\sqrt{2}$ dans le filtrage du signal délivré par le capteur inductif ?

On prendra dans la suite $R_1 = R_2 = R$ (donc $Q = 1/\sqrt{2}$). Dans ce cas particulier, la réponse en amplitude du filtre est identique à celle d'un filtre dit de *Butterworth*.

Q21. Exprimer le gain réel $G(\omega)$ et le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ de ce filtre.

Q22. Montrer que le déphasage entre la tension de sortie et celle de l'entrée s'écrit sous la forme :

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_0}} \right)$$

Q23. Exprimer la fréquence de coupure f_c de ce filtre et donner sa bande passante.

On souhaite régler la fréquence de coupure à $f_c = 24 \text{ Hz}$, calculer, en nF , la valeur de la capacité C nécessaire si on fixe $R = 10 \text{ k}\Omega$.

Q24. Faire une étude asymptotique et tracer le diagramme de Bode de ce filtre en fonction de $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

Q25. Décrire le comportement du filtre lorsque la fréquence du signal d'entrée $f \gg f_c$. En déduire l'expression approchée de la tension de sortie $v_s(t)$ pour une tension d'entrée $v_e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

Q26. On injecte, désormais, à l'entrée de filtre le signal détecté par le capteur inductif $u(t)$. Déterminer l'expression de tension en sortie du filtre $u_s(t)$. Que peut-on conclure sur l'efficacité du filtrage vis-à-vis le parasite ?

Q27. Le filtre précédent est remplacé par un filtre de type *Butterworth* d'ordre 4 et de même fréquence de coupure $f = 24 \text{ Hz}$.

On admet que le gain en tension d'un filtre de *Butterworth* d'ordre n peut s'écrire sous la forme :

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

Le parasite est-il suffisamment atténué pour garantir une analyse fiable des vibrations ? Justifier.

Q28. Que peut-on qualifier ce filtre utilisé et quel est son rôle dans la chaîne de traitement du signal ?

Troisième Partie : Rayonnement dipolaire

Les molécules d'air, exposées à la lumière solaire dispersent d'avantage les courtes longueurs d'ondes (bleu, violet) que les longues (rouge), ce qui rend le ciel bleu en journée et le soleil rouge au lever et au coucher. On étudie ici la diffusion de Rayleigh afin d'expliquer ce phénomène.

Une onde électromagnétique incidente, décrite par son champ électrique : $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_z$, interagit avec les molécules de l'atmosphère. Une molécule peut être modélisée par un ion positif supposé fixe en O et un électron susceptible de se déplacer selon l'axe (Oz). Sous l'action de cette onde, l'électron de masse m_e et de charge $q = -e$ devient animé d'un mouvement non relativiste.

On suppose que l'électron est soumis aux forces suivantes :

- Force électrique de l'onde : $\vec{F}_e = q \vec{E}$
- Force magnétique : $\vec{F}_m = q \vec{v}_e \wedge \vec{B}$
- Force de rappel : $\vec{F}_r = -m_e \omega_0^2 z \vec{u}_z$
- Force de frottement visqueux : $\vec{F}_f = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}_e$

où ω_0 et τ sont deux constantes positives.

Q29. Expliquer pour quelle raison l'effet du champ magnétique de l'onde sur le mouvement de l'électron peut être négligé.

Q30. Sous quelle condition portant sur la longueur d'onde peut-on assimiler le champ électrique de l'onde à un champ uniforme à l'échelle de molécule ? Réécrire alors l'expression du champ électrique dans cette condition. Cette condition est-elle vérifiée pour les ondes lumineuses ?

Q31. Montrer qu'en régime forcé le mouvement de l'électron est décrit par :

$$\vec{z} = -\frac{\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} e^{i\omega t} \vec{u}_z$$

où γ est une constante à exprimer en fonction de m_e , E_0 et la charge élémentaire e .

Q32. La molécule peut être assimilée à un dipôle oscillant de moment dipolaire induit défini par :

$$\vec{p} = (-e) \vec{z} = \vec{p}_0 e^{i\omega t}$$

Déterminer $p_0(\omega) = |\vec{p}_0|$.

Q33. On donne la pulsation propre $\omega_0 = 2,2 \cdot 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$ et le temps de relaxation $\tau \approx 10^{-8} \text{ s}$.

Montrer que, pour une onde électromagnétique appartenant au domaine visible ($\omega \approx 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$), l'amplitude du moment dipolaire induit devient indépendante de la pulsation ω de l'onde.

On suppose que ce dipôle, de moment dipolaire $\vec{p} = p_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z$, est situé à l'origine O du système des coordonnées (x, y, z) . Il rayonne en un point M de l'espace, repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) , une onde de pulsation $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, où λ est la longueur d'onde (Figure 3).

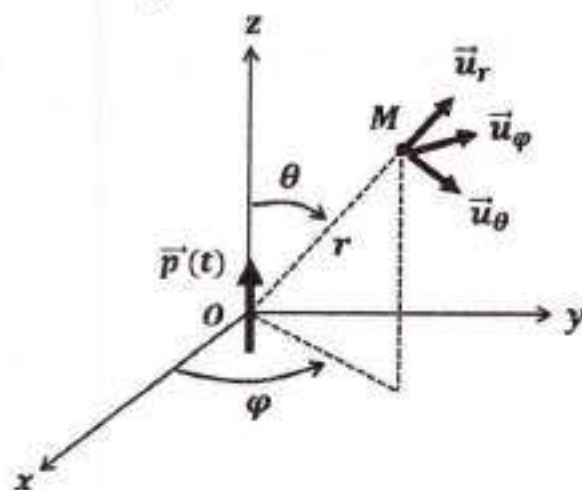


Figure 3

Q34. Qu'est-ce que l'approximation dipolaire et la zone de rayonnement ?

Q35. Dans ce cadre, le champ électrique est donné par :

$$\vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} e^{i\omega(t - \frac{r}{c})} \vec{u}_\theta$$

Justifier que cette expression du champ électrique est compatible avec la symétrie du problème.

Q36. Dans la zone de rayonnement, le champ rayonné possède localement la structure d'une onde plane. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$.

Q37. Montrer que la valeur moyenne du vecteur de Poynting associée à cette onde électromagnétique s'écrit :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \beta \left(\frac{\sin \theta}{r} \right)^2 \omega^4 \vec{u}_r$$

où β est à exprimer en fonction des constantes du problème.

Q38. En déduire la puissance moyenne rayonnée par le dipôle P_{ray} à travers une sphère de centre O et de rayon r . Commenter.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q39. Le spectre visible s'étend approximativement du bleu ($\lambda_b = 400 \text{ nm}$) au rouge ($\lambda_r = 800 \text{ nm}$), ces deux longueurs d'onde correspondant aux extrémités du domaine visible.

En comparant quantitativement les puissances diffusées associées à ces deux longueurs d'onde extrêmes, expliquer l'origine de la couleur bleue du ciel pendant la journée et la couleur rouge du soleil au coucher.

En réalité, le spectre visible s'étend du violet au rouge. Bien que la diffusion de Rayleigh favorise les courtes longueurs d'onde, le ciel devrait apparaître violet. Ce « paradoxe » s'explique par le fait que l'œil humain est beaucoup moins sensible au violet qu'au bleu.

Quatrième Partie : Spectrométrie interférentielle et pouvoir de résolution

Les spectres d'émissions atomiques sont les "cartes d'identité" lumineuses des éléments chimiques. Ils sont composés des raies discontinues contenant parfois des doublets très proches dont la résolution nécessite des instruments performants. L'interférence est l'une des techniques utilisées pour la séparation. En spectrométrie interférentielle, le pouvoir de résolution d'un interféromètre est sa capacité à séparer deux longueurs d'onde proches. Il est donné par la formule : $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}}$, où

$\Delta\lambda_{\min}$ est la plus petite différence de longueur d'onde que l'instrument peut distinguer.

Dans cette partie, on compare les performances de quelques interféromètres (les fentes d'Young, le réseau par transmission et l'interféromètre de Michelson) dans la résolution des longueurs d'onde très proches.

1. Fentes d'Young

Source ponctuelle monochromatique

On considère un dispositif de fentes d'Young. La source principale S , considérée comme quasi-ponctuelle, émet une lumière monochromatique de longueur d'onde λ_0 . Les deux fentes F_1 et F_2 sont très fines, identiques et distantes de $F_1F_2 = a$. La distance D entre les fentes et l'écran et la distance d entre la source et les fentes sont grandes devant a et devant les coordonnées (x, y) du point M sur l'écran (Figure 4). L'intensité lumineuse émise par une seule fente est notée I_0 .

On donne : $a = 5 \text{ mm}$, $d = 10 \text{ cm}$, $D = 2 \text{ m}$ et $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$.

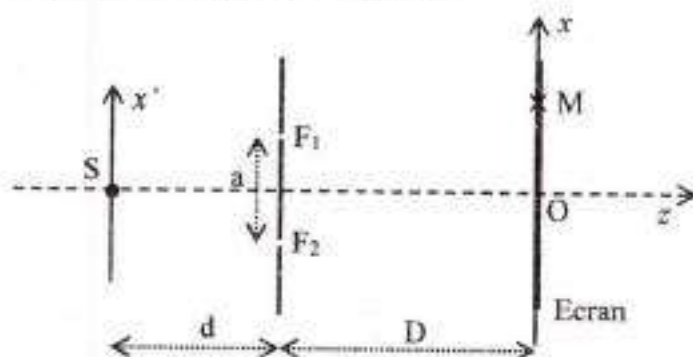


Figure 4

Q40. Soient deux rayons issus de la source S . Après être passés respectivement par F_1 et F_2 , ils interfèrent sur l'écran en un point M d'abscisse x .

Déterminer la différence de marche $\delta(x)$ entre ces deux rayons et l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$. En déduire l'expression de l'interfrange i . Calculer sa valeur numérique.

Source large

On remplace la source ponctuelle S par une source large monochromatique étendue symétriquement par rapport à la position initiale sur l'axe (Sx') de $-b/2$ à $+b/2$. Elle émet de manière uniforme.

Q41. Exprimer l'intensité lumineuse élémentaire $dI(M)$, donnée par l'interféromètre éclairé par une source élémentaire de largeur dx' .

Montrer que l'intensité totale $I(M)$ s'écrit sous la forme : $I(M) = 2I_0 \left(1 + \text{sinc}(u) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(x) \right) \right)$

Exprimer u en fonction des données du problème.

Q42. Donner l'expression du contraste défini par : $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$. Discuter l'effet de la largeur b

de la source sur le contraste. Calculer la valeur de b pour laquelle le contraste s'annule pour la première fois. Conclure.

Tracer la courbe donnant $I(M)$ en fonction de la position sur l'écran pour $b = 7,5 \mu\text{m}$.

Graphical area for plotting the intensity distribution $I(M)$ as a function of position on the screen for $b = 7,5 \mu\text{m}$.

Largeur de raie spectrale

La source quasi-ponctuelle S émet maintenant une raie verte, centrée autour d'une fréquence moyenne ν_0 correspondant à la longueur d'onde $\lambda_0 = 546,1 \text{ nm}$. On désigne par dI_0 la contribution en intensité de la bande spectrale élémentaire $d\nu$ telle que : $dI_0 = I_\nu(\nu) d\nu$, avec :

$$I_\nu(\nu) = \begin{cases} A & \text{si } \nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2} \leq \nu \leq \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et $\Delta\nu = 10^{12} \text{ Hz}$.

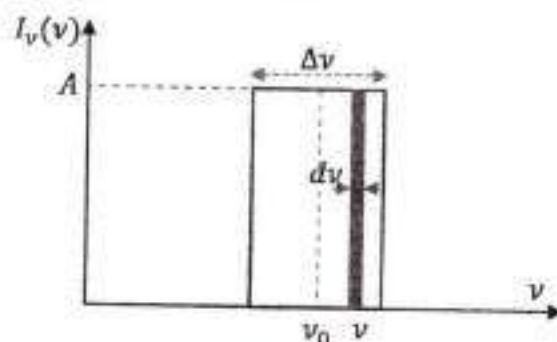


Figure 5

Q43. Montrer que l'intensité détectée en un point M sur l'écran, peut se mettre sous la forme :

$$I(x) = 2I_0[1 + f(x)\cos(g(x))]$$

où $f(x)$ et $g(x)$ étant deux fonctions que l'on déterminera. Préciser l'expression de I_0 en fonction de A et $\Delta\nu$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q44. Déterminer l'expression du contraste. Quelle est la valeur x_0 pour laquelle le contraste s'annule pour la première fois.

Q45. Tracer l'allure des graphes $|f(x)|$ et $I(x)$ en précisant les valeurs remarquables.

Séparation d'un doublet

La source quasi-ponctuelle S émet maintenant deux radiations lumineuses de même intensité I_0 et de longueurs d'ondes $\lambda_{Hg1} = 577,0 \text{ nm}$ et $\lambda_{Hg2} = 579,1 \text{ nm}$ (doublet jaune du mercure).

Q46. Montrer que l'expression de l'intensité $I(x)$ en un point M de l'écran s'écrit sous la forme :

$$I(x) = 4I_0 \left[1 + \cos \left(\pi \left(\frac{1}{\lambda_{Hg1}} - \frac{1}{\lambda_{Hg2}} \right) \delta(x) \right) \cos \left(\pi \left(\frac{1}{\lambda_{Hg1}} + \frac{1}{\lambda_{Hg2}} \right) \delta(x) \right) \right]$$

On note : $\Delta\lambda_{Hg} = \lambda_{Hg2} - \lambda_{Hg1}$ et $\lambda_{Hg0} = (\lambda_{Hg2} + \lambda_{Hg1})/2$, avec $\Delta\lambda_{Hg} \ll \lambda_{Hg0}$.

Exprimer $I(x)$ en fonction de $\Delta\lambda_{Hg}$ et λ_{Hg0} .

NE BIEN ÉCRIRE ICI

Q47. L'allure théorique que pourrait avoir $I(x)$ est représentée sur la Figure 6.

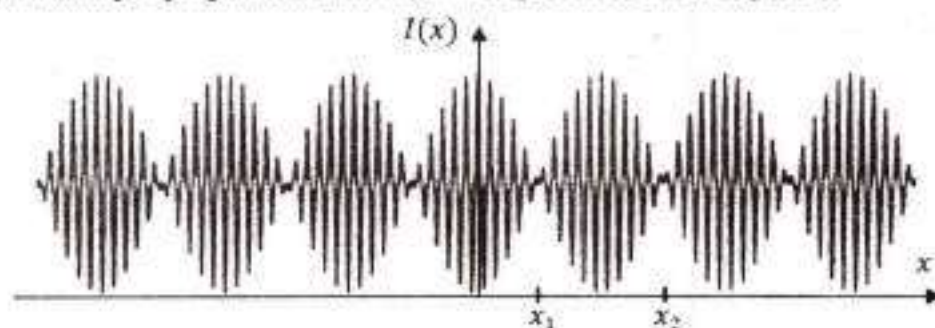


Figure 6

Montrer que cette allure permet de déduire les deux longueurs d'ondes. Préciser la démarche.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q48. Réellement, l'interféromètre d'Young permet-il de mesurer λ_{Hg1} et λ_{Hg2} ? Justifier votre réponse.

II. Réseau par transmission

Considérons un réseau plan constitué de N fentes identiques, fines et parallèles. On pose a le "pas" de ce réseau, avec $N=800$ et $a=5\mu m$. Le réseau est éclairé par un faisceau parallèle, monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , sous une incidence i .

Le faisceau est diffracté à l'infini dans la direction θ . Les angles i et θ mentionnés sont positifs (Figure 7).

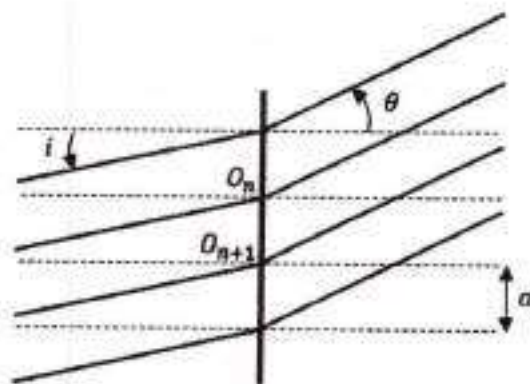


Figure 7

Q49. Exprimer la différence de marche δ entre deux rayons passant par deux fentes consécutives.

[illegible]

Q50. L'amplitude de l'onde diffractée par la fente numéro 1, avec origine de phase O_1 , dans la direction θ est a_0 . Déterminer l'expression de l'intensité diffractée par le réseau dans la direction θ . En déduire les directions θ_k des maximums principaux d'ordre k (relation fondamentale des réseaux).

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are approximately 20 lines visible. The paper has a slightly textured appearance and is set against a dark background.

Q51. On désigne par $D = \theta_k - i$, la déviation entre la direction du faisceau incident et celle du faisceau diffracté, pour un ordre k fixé et une longueur d'onde λ_0 donnée. En faisant tourner le réseau autour d'un axe parallèle à ses fentes, la déviation passe par une valeur minimale D_m pour une valeur i_m de l'angle d'incidence. Déterminer i_m en fonction de θ_{km} .

Q52. Réécrire la relation fondamentale du réseau dans cette condition, en fonction de la déviation minimale D_m .

La valeur de θ_{km} pour la radiation moyenne du doublet jaune du mercure est $3,31^\circ$, déterminer la longueur d'onde moyenne λ_{moy} .

Q53. Deux radiations incidentes, de longueurs d'onde très proches λ et $\lambda + d\lambda$, se diffractent par le réseau dans deux directions voisines (θ_k et $\theta_k + d\theta_k$). Exprimer la variation angulaire $d\theta_k$ en fonction de k , a , θ_k et $d\lambda$.

Q54. Parmi les critères de résolution, on utilise le critère de Rayleigh qui stipule que deux raies sont dites séparées si le maximum d'intensité pour la radiation $\lambda + d\lambda$ correspond au premier minimum de la radiation λ .

Montrer que le pouvoir de résolution de ce réseau est $R_R = kN$.

Q55. Le spectromètre à réseau, avec ces caractéristiques, permet-il de résoudre le doublet jaune du mercure ($\lambda_{Hg1} = 577,0 \text{ nm}$ et $\lambda_{Hg2} = 579,1 \text{ nm}$), le doublet jaune du sodium ($\lambda_{Na1} = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_{Na2} = 589,6 \text{ nm}$), ainsi que le doublet rouge de lithium ($\lambda_{Li1} = 670,776 \text{ nm}$ et $\lambda_{Li2} = 670,791 \text{ nm}$) ?

III. Interféromètre de Michelson :

L'interféromètre de Michelson est constitué de deux miroirs M_1 et M_2 réglables et une lame séparatrice semi-réfléchissante SP qui n'introduit pas de déphasage (Figure 8). L'écran E est placé perpendiculairement à l'axe (OB) .

On définit les longueurs de bras de l'interféromètre par $L_1 = OA_1$ et $L_2 = OA_2$.

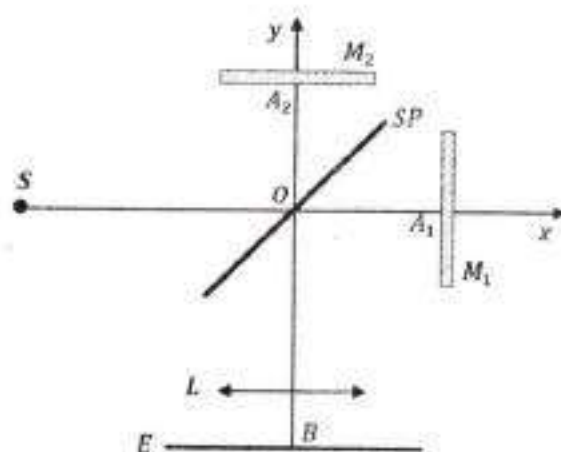


Figure 8

L'interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air. Initialement, $L_1 = L_2$. On translate le miroir M_1 d'une distance $x(t)$ à vitesse uniforme.

On note $I(x)$ l'intensité du point central de la figure d'interférence observée dans le plan focal d'une lentille convergente (L).

L'interféromètre est éclairé par une source de lithium émettant un doublet rouge de longueurs d'ondes très proches ($\lambda_{Li1} = 670,776 \text{ nm}$ et $\lambda_{Li2} = 670,791 \text{ nm}$).

On note : $\Delta\lambda_{Li} = \lambda_{Li2} - \lambda_{Li1}$ et $\lambda_{Li0} = (\lambda_{Li2} + \lambda_{Li1})/2$.

Q56. Chaque radiation est émise avec la même intensité I_0 . L'intensité $I(x)$ est de la forme :

$$I(x) = 4I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda_{L0}} \frac{\Delta\lambda_{Li}}{\lambda_{L0}} \delta(x)\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_{L0}} \delta(x)\right) \right]$$

Déterminer la période du brouillage, notée Δx . Faire l'application numérique.

Q57. La translation maximale du bras L_I de l'interféromètre est $(\Delta L_I)_{\max} = 5 \text{ cm}$.

Quelle est le plus petit écart discernable en longueur d'onde $(\Delta\lambda)_{\min}$ entre deux raies situées autour de $\lambda_{L0} = 670,783 \text{ nm}$ par ce dispositif ? En déduire la valeur de son pouvoir de résolution R_M , autour de cette longueur d'onde.

Peut-on résoudre alors le doublet rouge de lithium avec l'interféromètre de Michelson ?

Q58. Le pouvoir de résolution d'un interféromètre de Fabry-pérot R_F est très élevé (de l'ordre de 10^7). Quel est l'ordre de grandeur du plus petit écart discernable par ce dispositif entre deux raies centrées autour de $\lambda_0 \approx 500 \text{ nm}$?

Comparer les ordres de grandeur des pouvoirs de résolution des interféromètres de Fabry-pérot R_F , de Michelson R_M et d'un réseau par transmission R_R .

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Cinquième Partie : Eléments de la thermodynamique statistique

Selon la loi de Dulong et Petit, la capacité thermique molaire est proche de la valeur $3R$ pour les solides monoatomiques, avec R est la constante du gaz parfait. Cette valeur est déduite dans le cadre d'une description classique des vibrations atomiques au sein des solides.

Bien que cette loi soit vérifiée pour certains matériaux, elle ne convient pas pour d'autres. Cette spécificité met en question les limites du théorème d'équipartition de l'énergie et justifie la nécessité de sa quantification. Expérimentalement, à la température ambiante, on constate que la capacité thermique molaire du plomb suit la loi de Dulong et Petit, alors que celle du diamant est très éloignée.

On se place dans le cas de l'approximation d'un solide isolant monoatomique.

On souhaite déterminer la capacité thermique molaire de deux solides cristallins monoatomiques : le plomb (Pb) et le diamant (C).

Données :

- Température d'Einstein du plomb : $T_{E(Pb)} = 100 \text{ K}$.
- Température d'Einstein du diamant : $T_{E(C)} = 1325 \text{ K}$.

On modélise un solide cristallin monoatomique par un système de N atomes identiques. Chaque atome, de masse m , est repéré par ces coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

Sous l'effet de l'agitation thermique et de la force de rappel élastique caractérisée par une raideur k , chaque atome vibre autour de sa position d'équilibre.

Q59. En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, exprimer l'énergie moyenne d'un atome $\langle E \rangle$.

Q60. Dédurre l'énergie interne molaire U_m du solide, ainsi que sa capacité thermique molaire à volume constant C_{vm} en fonction de R . Commenter.

Q61. L'expérience montre qu'à température ambiante (300 K) les capacités thermiques molaires du Plomb et du diamant sont respectivement $24,9 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $6,12 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Que peut-on dire quant à la validité du modèle classique ?

Le modèle classique des vibrations n'explique pas la variation de la capacité thermique des solides en fonction de la température telle qu'elle est observée expérimentalement, notamment à basse température. Pour cela, on introduit le modèle quantique d'Einstein, qui consiste à considérer les atomes dans le solide comme des oscillateurs harmoniques quantiques.

Comme chaque atome peut osciller dans les trois directions de l'espace, il sera modélisé par trois oscillateurs unidimensionnels indépendants.

On admet que l'énergie d'un oscillateur quantique unidimensionnel de fréquence ν s'écrit :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu$$

Avec $n \in \mathbb{N}$ est nombre quantique.

Q62. Exprimer la fonction de partition de l'oscillateur harmonique. On pose : $\beta = 1/k_B T$.

Q63. Trouver alors l'énergie moyenne d'un oscillateur et la mettre sous la forme :

$$\langle E \rangle = \left(\frac{h\nu}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta h\nu}{2} \right)$$

En déduire l'expression de l'énergie interne molaire U_m d'un solide monoatomique.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q64. Etablir l'expression de la capacité thermique molaire à volume constant C_{vm} et l'écrire sous la forme:

$$C_{vm} = 3R \times \left(\frac{T_E}{2T} \right)^2 \left(\frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{T_E}{2T} \right)} \right)$$

où T_E est la température d'Einstein que l'on déterminera son expression.

Q65. Discuter le comportement de la capacité thermique molaire à haute température ($T \gg T_E$) et à basse température ($T \ll T_E$). Commenter.

NE BIEN ÉCRIRE ICI

Q66. Donner une explication physique de ces deux comportements en raisonnant sur la population des niveaux d'énergie.

Q67. A température ambiante ($T = 300\text{ K}$), justifier que le modèle quantique d'Einstein confirme la valeur de la capacité thermique molaire expérimentale du plomb.

Q68. Ce modèle permet-il de retrouver la valeur expérimentale de la capacité thermique molaire du diamant. Justifier.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Fin de l'épreuve

NE PAS ÉCRIRE ICI

