



AVIS IMPORTANT AUX CANDIDATS

Ce cahier d'examen est strictement personnel. Il ne doit comporter aucun signe distinctif.
Les réponses doivent être rédigées en noir ou en bleu.
Le non respect de l'une de ces recommandations peut conduire à l'attribution de la note ZERO à la copie.

Case à cocher si le
candidat est absent

☐

CONCOURS : **Mathématiques et physique**

EPREUVE DE : **Mathématiques I**

DATE : **02-06-2026 à 8 H 00**

DURÉE : **4 HEURES**

NOM :

PRÉNOM :

DATE DE NAISSANCE :

N° de C.I.N/PASSEPORT pour les étrangers :

SÉRIE :

IDENTIFIANT :

Signature des enseignants

--	--

Signature du candidat

--

NE RIEN ÉCRIRE ICI



Concours Mathématiques et Physique
Épreuve de Mathématiques I

Session 2026	Date : 02/06/2026	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

Feuilles de réponses

Problème :

On note par

- $I = [1, +\infty[$;
- $\mathcal{R}^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow]0, +\infty[$ de classe C^1 sur I vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = \alpha ;$$

- $\mathcal{L} = \mathcal{R}^0$, c'est-à-dire, $L \in \mathcal{L}$ si et seulement si L est strictement positive et de classe C^1 sur I vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x L'(x)}{L(x)} = 0.$$

Partie I.

Q.1 ▷ Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \in I \mapsto x^\alpha$ appartient à $\mathcal{R}^\alpha$, et que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $f_\alpha \notin \mathcal{L}$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.2 ▷ Soient $c > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Justifier que les fonctions suivantes, définies sur I , appartiennent à $\mathcal{L}$:

$$x \longmapsto c, \quad g_\beta : x \longmapsto (\ln(2x))^\beta \quad \text{et} \quad x \longmapsto \ln(\ln(3x)).$$

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.3 ▷ Soit $\gamma \in \mathbb{R}^*$. Prouver que la fonction $h_\gamma : x \in I \longmapsto e^{\gamma x}$ n'appartient pas à $\mathcal{R}^\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Q.4 ▷ Justifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $L \in \mathcal{L}$, la fonction $f : x \in I \mapsto x^\alpha L(x)$ appartient à $\mathcal{R}^\alpha$.

Q.5 ▷ Prouver que si $f \in \mathcal{R}^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors il existe $L \in \mathcal{L}$ telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = x^\alpha L(x).$$

Q.6 ▷ Montrer que si $f \in \mathcal{R}^\alpha$ et $g \in \mathcal{R}^\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $fg \in \mathcal{R}^{\alpha+\beta}$ et $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}^{\alpha-\beta}$.

Q.7 ▷ Prouver que si $f \in \mathcal{R}^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $f^\beta \in \mathcal{R}^{\alpha\beta}$.

Q.8 ▷ Montrer que si $f, g \in \mathcal{R}^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $f + g \in \mathcal{R}^\alpha$.

Q.9 ▷ Prouver que si $f \in \mathcal{R}^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors il existe $a \geq 1$ tel que f soit strictement croissante sur $[a, +\infty[$ si $\alpha > 0$, et f soit strictement décroissante sur $[a, +\infty[$ si $\alpha < 0$.

Q.10 ▷ Montrer que $L \in \mathcal{L}$ si et seulement s'ils existent une constante réelle $c > 0$ et une unique fonction $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I telles que

$$\forall x \in I, \quad L(x) = c \exp \left(\int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt \right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) = 0.$$

Q.11 ▷ Soient $L \in \mathcal{L}$, $\lambda > 0$ et φ la fonction définie sur I par : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{L'(t)}{L(t)} dt$, $x \in I$.

Prouver que pour tout $x \in I$,

$$\ln(L(\lambda x)) - \ln(L(x)) = \varphi(\lambda x) - \varphi(x) \text{ et que } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(L(\lambda x)) - \ln(L(x))) = 0.$$

Puis en déduire que $\forall \lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1$.

Q.12 ▷ On considère la fonction L_0 définie sur I par : $L_0(x) = \exp\left(\frac{\sin(x^2)}{x}\right)$, $x \in I$.

Justifier que pour tout $\lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L_0(\lambda x)}{L_0(x)} = 1$. La fonction L_0 appartient-elle à $\mathcal{L}$?

Q.13 ▷ Soit $L : I \longrightarrow]0, +\infty[$ une fonction de classe C^1 sur I vérifiant : la fonction $\frac{L'}{L}$ est monotone sur I et pour tout $\lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1$. Montrer que $L \in \mathcal{L}$.

NE RIEN ECRIRE ICI

Partie II.

Soit $L \in \mathcal{L}$.

Q.14 ▷ En utilisant Q.10, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \geq 1; \forall x, y \geq A, \quad \min \left(\left(\frac{x}{y} \right)^\varepsilon, \left(\frac{x}{y} \right)^{-\varepsilon} \right) \leq \frac{L(x)}{L(y)} \leq \max \left(\left(\frac{x}{y} \right)^\varepsilon, \left(\frac{x}{y} \right)^{-\varepsilon} \right).$$

Q.15 ▷ En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$L(x) \underset{+\infty}{=} \circ (x^\varepsilon) \quad \text{et} \quad x^{-\varepsilon} \underset{+\infty}{=} \circ (L(x)).$$

Q.16 ▷ Montrer que si $f \in \mathcal{R}^\alpha$ et $g \in \mathcal{R}^\beta$, avec $\alpha > \beta$, alors $g \underset{+\infty}{=} \circ (f)$, $f + g \underset{+\infty}{\sim} f$ et $f + g \in \mathcal{R}^\alpha$.
Puis prouver que si de plus $\alpha \neq 0$, alors $g' \underset{+\infty}{=} \circ (f')$.

Q.17 ▷ Justifier que pour tout $x > 1$, $\int_1^x t^\alpha L(t) dt = x^{\alpha+1} L(x) \int_{\frac{1}{x}}^1 u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du$.

Q.18 ▷ Si $\alpha > -1$, alors prouver l'existence de deux réels $A_1 > 1$ et $c_1 > 0$ tels que pour tout $x \geq A_1$, on ait :

$$\begin{aligned} \forall u \in \left[\frac{A_1}{x}, 1 \right], \quad \frac{L(xu)}{L(x)} &\leq u^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \\ \forall u \in \left[\frac{1}{x}, \frac{A_1}{x} \right], \quad \frac{L(xu)}{L(x)} &\leq c_1 x^{\frac{\alpha+1}{2}} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{A_1}{x}} u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du \leq \frac{c_1 A_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} x^{-\frac{\alpha+1}{2}}. \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.19 ▷ Montrer que si $\alpha > -1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{A_1}{x}} u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{A_1}{x}}^1 u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du = \frac{1}{\alpha + 1}$.

Q.20 ▷ En déduire que si $\alpha > -1$, alors

$$\int_1^x t^\alpha L(t) dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^{\alpha+1} L(x)}{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} t^\alpha L(t) dt \text{ diverge.}$$

Q.21 ▷ Si $\alpha < -1$, alors justifier qu'il existe $A_2 \geq 1$ tel que pour tout $x \geq A_2$, on ait :

$$\forall u \geq 1, \quad \frac{L(xu)}{L(x)} \leq u^{-\frac{\alpha+1}{2}} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du \quad \text{converge.}$$

Ensuite prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du = -\frac{1}{\alpha+1}$.

Q.22 ▷ Montrer que si $\alpha < -1$, alors $\int_1^{+\infty} t^\alpha L(t) dt$ converge et $\int_x^{+\infty} t^\alpha L(t) dt \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x^{\alpha+1} L(x)}{\alpha+1}$.

Q.23 ▷ Donner deux fonctions $\ell_1 \in \mathcal{L}$ et $\ell_2 \in \mathcal{L}$ telles que $\int_1^{+\infty} \frac{\ell_1(t)}{t} dt$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{\ell_2(t)}{t} dt$ diverge.

Q.24 ▷ Prouver que si $\int_1^{+\infty} \frac{L(t)}{t} dt$ diverge, alors $L(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\int_1^x \frac{L(t)}{t} dt\right)$ et la fonction

$$x \mapsto \int_1^{x+1} \frac{L(t)}{t} dt \in \mathcal{L}.$$

Q.25 ▷ Montrer que si $\int_1^{+\infty} \frac{L(t)}{t} dt$ converge, alors $L(x) = o\left(\int_x^{+\infty} \frac{L(t)}{t} dt\right)$ et la fonction

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{L(t)}{t} dt \in \mathcal{L}.$$

Partie III.

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$$E = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} ; f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et } f(x) = O(x) \right\},$$

et son sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} ; f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et } f(x) = o(x) \right\}.$$

On munit E de sa norme $\| \cdot \|$ définie par $\|f\| = \sup_{x \geq 1} \frac{|f(x)|}{x}$, $f \in E$.

Pour $f \in E$, on appelle distance de f à $\mathcal{L}$ et on note $d_{\mathcal{L}}(f)$ la quantité $d_{\mathcal{L}}(f) = \inf_{L \in \mathcal{L}} \|f - L\|$.

Q.26 ▷ Justifier que $d_{\mathcal{L}}$ définit une application de E à valeurs réelles positives.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

[illegible]

Q.28 ▷ Soit $(f, g) \in E^2$. Prouver que $|d_{\mathcal{L}}(f) - d_{\mathcal{L}}(g)| \leq \|f - g\|$.

Q.29 ▷ En déduire que l'application $d_{\mathcal{L}}$ est continue sur E .

Q.30 ▷ Déterminer $d_{\mathcal{L}}(f)$, lorsque $f : x \in I \mapsto f(x) = x$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$, $L_n(x) = 2 + \frac{\sin(\ln x)}{1 + \frac{(\ln x)^2}{n}}$.

Q.31 ▷ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n \in \mathcal{L}$ et que la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur I vers une fonction $g \in F$ à déterminer.

Q.32 ▷ Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_n - g\| = 0$ et en déduire que $\mathcal{L}$ n'est pas une partie fermée de $(E, \|\cdot\|)$.

Q.33 ▷ La suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur I ?

Q.34 ▷ Les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $C_b(I, \mathbb{R})$, sont-elles équivalentes ?
 où $C_b(I, \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles,
 et $\|h\|_\infty = \sup_{x \geq 1} |h(x)|$, pour tout $h \in C_b(I, \mathbb{R})$.

Partie IV.

Soient $\alpha > 0$, $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ et vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad P(X > t) = t^{-\alpha} L_1(t) \quad \text{et} \quad P(Y > t) = t^{-\alpha} L_2(t).$$

Q.35 ▷ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$,

$$P(X + Y > n) \geq P(X > n) + P(Y > n) - P(X > n, Y > n)$$

et
$$P(X + Y > n) \leq P(X > (1 - \delta)n) + P(Y > (1 - \delta)n) + P(X > \delta n, Y > \delta n).$$

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.36 ▷ Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $(1 - \delta)^{-2\alpha} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{P(X > n)P(Y > n)}{P(X > n) + P(Y > n)} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{P(X > \delta n)P(Y > \delta n)}{P(X > n) + P(Y > n)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Q.37 ▷ En déduire que $P(X + Y > n) \underset{+\infty}{\sim} P(X > n) + P(Y > n)$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.38 ▷ Déterminer l'ensemble des valeurs du réel β pour que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\beta}$ soit convergente et vérifier que sa somme notée $\zeta(\beta)$, est strictement positive.

On considère la variable aléatoire discrète Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z = k) = \frac{1}{\zeta(\alpha + 1)} \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

Q.39 ▷ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z > n) = \frac{1}{\zeta(\alpha + 1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$

Q.40 ▷ Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{R}^{-\alpha}$ telle que $P(Z > n) \underset{+\infty}{\sim} f(n).$

Partie V.

Soient $\alpha > 1$ et $L \in \mathcal{L}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{L(n)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Q.41 ▷ En utilisant Q.9 et Q.22, prouver que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{na_n}{\alpha - 1}$.

On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.42 ▷ En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1, et que celui de la série $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$ est égal à 1.

Q.43 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $(1-x) \sum_{k=1}^n S_k x^k = \sum_{k=1}^n a_k x^k - S_n x^{n+1}$.

Q.44 ▷ En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $(1-x) \sum_{k=1}^{+\infty} S_k x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$.

Q.45 ▷ Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = S$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, $u_n(x) = \frac{L(n)}{(1+nx)^\alpha}$.

Q.46 ▷ Justifier que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Pour $x > 0$, on note $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Q.47 ▷ La série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$ lorsque

$$L : t \in I \longmapsto L(t) = \ln(2t) ?$$

Q.48 ▷ Montrer que U est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de $U'(x)$, pour tout $x > 0$.

Q.49 ▷ Prouver que pour tout $x > 0$, $-\alpha U(x) \leq x U'(x) \leq -\frac{\alpha x}{x+1} U(x)$, puis en déduire que $U|_I \in \mathcal{R}^{-\alpha}$.

NE RIEN ECRIRE ICI

Q.50 ▷ Montrer que U est intégrable sur I et que $\int_1^{+\infty} U(x) dx = \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L(n)}{n(n+1)^{\alpha-1}}$.

Espace supplémentaire pour les réponses

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Area with horizontal dotted lines for writing.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Area with horizontal dotted lines for writing.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

★ Fin de l'épreuve ★



Concours Mathématiques et Physique
Épreuve de Mathématiques I

Session 2026	Date : 02/06/2026	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

L'usage de la calculatrice et tout autre dispositif électronique est interdit.

Rédigez vos réponses exclusivement dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. En cas de manque de place, utilisez l'espace supplémentaire situé à la fin du cahier, en précisant le numéro de la question et en indiquant clairement dans l'espace initial que votre réponse se poursuit en annexe. Si vous détectez une erreur ou une incohérence dans l'énoncé, signalez-la impérativement sur votre copie tout en poursuivant votre travail.

Problème :

On note par

- $I = [1, +\infty[$;
- $\mathcal{R}^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow]0, +\infty[$ de classe C^1 sur I vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha ;$$

- $\mathcal{L} = \mathcal{R}^0$, c'est-à-dire, $L \in \mathcal{L}$ si et seulement si L est strictement positive et de classe C^1 sur I vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xL'(x)}{L(x)} = 0.$$

Partie I.

Q.1 ▷ Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \in I \mapsto x^\alpha$ appartient à $\mathcal{R}^\alpha$, et que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $f_\alpha \notin \mathcal{L}$.

Q.2 ▷ Soient $c > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Justifier que les fonctions suivantes, définies sur I , appartiennent à $\mathcal{L}$:

$$x \mapsto c, \quad g_\beta : x \mapsto (\ln(2x))^\beta \quad \text{et} \quad x \mapsto \ln(\ln(3x)).$$

Q.3 ▷ Soit $\gamma \in \mathbb{R}^*$. Prouver que la fonction $h_\gamma : x \in I \mapsto e^{\gamma x}$ n'appartient pas à $\mathcal{R}^\alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Q.4 ▷ Justifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $L \in \mathcal{L}$, la fonction $f : x \in I \mapsto x^\alpha L(x)$ appartient à $\mathcal{R}^\alpha$.

Q.5 ▷ Prouver que si $f \in \mathcal{R}^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors il existe $L \in \mathcal{L}$ telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = x^\alpha L(x).$$

Q.6 ▷ Montrer que si $f \in \mathcal{R}^\alpha$ et $g \in \mathcal{R}^\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $fg \in \mathcal{R}^{\alpha+\beta}$ et $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}^{\alpha-\beta}$.

Q.7 ▷ Prouver que si $f \in \mathcal{R}^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $f^\beta \in \mathcal{R}^{\alpha\beta}$.

Q.8 ▷ Montrer que si $f, g \in \mathcal{R}^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $f + g \in \mathcal{R}^\alpha$.

Q.9 ▷ Prouver que si $f \in \mathcal{R}^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors il existe $a \geq 1$ tel que f soit strictement croissante sur $[a, +\infty[$ si $\alpha > 0$, et f soit strictement décroissante sur $[a, +\infty[$ si $\alpha < 0$.

Q.10 ▷ Montrer que $L \in \mathcal{L}$ si et seulement s'ils existent une constante réelle $c > 0$ et une unique fonction $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I telles que

$$\forall x \in I, \quad L(x) = c \exp \left(\int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt \right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) = 0.$$

Q.11 ▷ Soient $L \in \mathcal{L}$, $\lambda > 0$ et φ la fonction définie sur I par : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{L'(t)}{L(t)} dt$, $x \in I$.
Prouver que pour tout $x \in I$,

$$\ln(L(\lambda x)) - \ln(L(x)) = \varphi(\lambda x) - \varphi(x) \quad \text{et que} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(L(\lambda x)) - \ln(L(x))) = 0.$$

$$\text{Puis en déduire que } \forall \lambda > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

Q.12 ▷ On considère la fonction L_0 définie sur I par : $L_0(x) = \exp \left(\frac{\sin(x^2)}{x} \right)$, $x \in I$.

Justifier que pour tout $\lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L_0(\lambda x)}{L_0(x)} = 1$. La fonction L_0 appartient-elle à $\mathcal{L}$?

Q.13 ▷ Soit $L : I \rightarrow]0, +\infty[$ une fonction de classe C^1 sur I vérifiant : la fonction $\frac{L'}{L}$ est monotone sur I et pour tout $\lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1$. Montrer que $L \in \mathcal{L}$.

Partie II.

Soit $L \in \mathcal{L}$.

Q.14 ▷ En utilisant **Q.10**, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \geq 1; \forall x, y \geq A, \quad \min \left(\left(\frac{x}{y} \right)^\varepsilon, \left(\frac{x}{y} \right)^{-\varepsilon} \right) \leq \frac{L(x)}{L(y)} \leq \max \left(\left(\frac{x}{y} \right)^\varepsilon, \left(\frac{x}{y} \right)^{-\varepsilon} \right).$$

Q.15 ▷ En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$L(x) \underset{+\infty}{=} o(x^\varepsilon) \quad \text{et} \quad x^{-\varepsilon} \underset{+\infty}{=} o(L(x)).$$

Q.16 ▷ Montrer que si $f \in \mathcal{R}^\alpha$ et $g \in \mathcal{R}^\beta$, avec $\alpha > \beta$, alors $g \underset{+\infty}{=} o(f)$, $f + g \underset{+\infty}{\sim} f$ et $f + g \in \mathcal{R}^\alpha$.
Puis prouver que si de plus $\alpha \neq 0$, alors $g' \underset{+\infty}{=} o(f')$.

Q.17 ▷ Justifier que pour tout $x > 1$, $\int_1^x t^\alpha L(t) dt = x^{\alpha+1} L(x) \int_{\frac{1}{x}}^1 u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du$.

Q.18 ▷ Si $\alpha > -1$, alors prouver l'existence de deux réels $A_1 > 1$ et $c_1 > 0$ tels que pour tout $x \geq A_1$, on ait :

$$\forall u \in \left[\frac{A_1}{x}, 1 \right], \quad \frac{L(xu)}{L(x)} \leq u^{-\frac{\alpha+1}{2}},$$

$$\forall u \in \left[\frac{1}{x}, \frac{A_1}{x} \right], \quad \frac{L(xu)}{L(x)} \leq c_1 x^{\frac{\alpha+1}{2}} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{A_1}{x}} u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du \leq \frac{c_1 A_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} x^{-\frac{\alpha+1}{2}}.$$

Q.19 ▷ Montrer que si $\alpha > -1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{A_1}{x}} u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{A_1}{x}}^1 u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du = \frac{1}{\alpha+1}$.

Q.20 ▷ En déduire que si $\alpha > -1$, alors

$$\int_1^x t^\alpha L(t) dt \sim_{+\infty} \frac{x^{\alpha+1} L(x)}{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} t^\alpha L(t) dt \text{ diverge.}$$

Q.21 ▷ Si $\alpha < -1$, alors justifier qu'il existe $A_2 \geq 1$ tel que pour tout $x \geq A_2$, on ait :

$$\forall u \geq 1, \quad \frac{L(xu)}{L(x)} \leq u^{-\frac{\alpha+1}{2}} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du \text{ converge.}$$

Ensuite prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} u^\alpha \frac{L(xu)}{L(x)} du = -\frac{1}{\alpha+1}$.

Q.22 ▷ Montrer que si $\alpha < -1$, alors $\int_1^{+\infty} t^\alpha L(t) dt$ converge et $\int_x^{+\infty} t^\alpha L(t) dt \sim_{+\infty} -\frac{x^{\alpha+1} L(x)}{\alpha+1}$.

Q.23 ▷ Donner deux fonctions $\ell_1 \in \mathcal{L}$ et $\ell_2 \in \mathcal{L}$ telles que $\int_1^{+\infty} \frac{\ell_1(t)}{t} dt$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{\ell_2(t)}{t} dt$ diverge.

Q.24 ▷ Prouver que si $\int_1^{+\infty} \frac{L(t)}{t} dt$ diverge, alors $L(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\int_1^x \frac{L(t)}{t} dt\right)$ et la fonction

$$x \mapsto \int_1^{x+1} \frac{L(t)}{t} dt \in \mathcal{L}.$$

Q.25 ▷ Montrer que si $\int_1^{+\infty} \frac{L(t)}{t} dt$ converge, alors $L(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{L(t)}{t} dt\right)$ et la fonction

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{L(t)}{t} dt \in \mathcal{L}.$$

Partie III.

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$$E = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} ; f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et } f(x) \underset{+\infty}{=} O(x) \right\},$$

et son sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} ; f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et } f(x) \underset{+\infty}{=} o(x) \right\}.$$

On munit E de sa norme $\| \cdot \|$ définie par $\|f\| = \sup_{x \geq 1} \frac{|f(x)|}{x}$, $f \in E$.

Pour $f \in E$, on appelle distance de f à $\mathcal{L}$ et on note $d_{\mathcal{L}}(f)$ la quantité $d_{\mathcal{L}}(f) = \inf_{L \in \mathcal{L}} \|f - L\|$.

Q.26 ▷ Justifier que $d_{\mathcal{L}}$ définit une application de E à valeurs réelles positives.

Q.27 ▷ Montrer que $\mathcal{L}$ est une partie convexe de F et que pour tout $(f, g) \in E^2$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$d_{\mathcal{L}}((1-t)f + tg) \leq (1-t)d_{\mathcal{L}}(f) + td_{\mathcal{L}}(g).$$

Q.28 ▷ Soit $(f, g) \in E^2$. Prouver que $|d_{\mathcal{L}}(f) - d_{\mathcal{L}}(g)| \leq \|f - g\|$.

Q.29 ▷ En déduire que l'application $d_{\mathcal{L}}$ est continue sur E .

Q.30 ▷ Déterminer $d_{\mathcal{L}}(f)$, lorsque $f : x \in I \mapsto f(x) = x$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$, $L_n(x) = 2 + \frac{\sin(\ln x)}{1 + \frac{(\ln x)^2}{n}}$.

Q.31 ▷ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n \in \mathcal{L}$ et que la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur I vers une fonction $g \in F$ à déterminer.

Q.32 ▷ Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L_n - g\| = 0$ et en déduire que $\mathcal{L}$ n'est pas une partie fermée de $(E, \| \cdot \|)$.

Q.33 ▷ La suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur I ?

Q.34 ▷ Les deux normes $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|_{\infty}$ sur $C_b(I, \mathbb{R})$, sont-elles équivalentes?

où $C_b(I, \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles, et $\|h\|_{\infty} = \sup_{x \geq 1} |h(x)|$, pour tout $h \in C_b(I, \mathbb{R})$.

Partie IV.

Soient $\alpha > 0$, $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ et vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad P(X > t) = t^{-\alpha} L_1(t) \quad \text{et} \quad P(Y > t) = t^{-\alpha} L_2(t).$$

Q.35 ▷ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$,

$$P(X + Y > n) \geq P(X > n) + P(Y > n) - P(X > n, Y > n)$$

et $P(X + Y > n) \leq P(X > (1-\delta)n) + P(Y > (1-\delta)n) + P(X > \delta n, Y > \delta n)$.

Q.36 ▷ Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $(1-\delta)^{-2\alpha} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{P(X > n)P(Y > n)}{P(X > n) + P(Y > n)} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{P(X > \delta n)P(Y > \delta n)}{P(X > n) + P(Y > n)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Q.37 ▷ En déduire que $P(X + Y > n) \underset{+ \infty}{\sim} P(X > n) + P(Y > n)$.

Q.38 ▷ Déterminer l'ensemble des valeurs du réel β pour que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\beta}}$ soit convergente et vérifier que sa somme notée $\zeta(\beta)$, est strictement positive.

On considère la variable aléatoire discrète Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z = k) = \frac{1}{\zeta(\alpha + 1)} \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

Q.39 ▷ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z > n) = \frac{1}{\zeta(\alpha + 1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$

Q.40 ▷ Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{R}^{-\alpha}$ telle que $P(Z > n) \underset{+\infty}{\sim} f(n).$

Partie V.

Soient $\alpha > 1$ et $L \in \mathcal{L}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{L(n)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Q.41 ▷ En utilisant Q.9 et Q.22, prouver que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{na_n}{\alpha - 1}.$

On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$

Q.42 ▷ En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1, et que celui de la série $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$ est égal à 1.

Q.43 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $(1 - x) \sum_{k=1}^n S_k x^k = \sum_{k=1}^n a_k x^k - S_n x^{n+1}.$

Q.44 ▷ En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $(1 - x) \sum_{k=1}^{+\infty} S_k x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k.$

Q.45 ▷ Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = S.$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, $u_n(x) = \frac{L(n)}{(1 + nx)^\alpha}.$

Q.46 ▷ Justifier que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $]0, +\infty[.$

Pour $x > 0$, on note $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$

Q.47 ▷ La série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$ lorsque

$$L : t \in I \longmapsto L(t) = \ln(2t) ?$$

Q.48 ▷ Montrer que U est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de $U'(x)$, pour tout $x > 0$.

Q.49 ▷ Prouver que pour tout $x > 0$, $-\alpha U(x) \leq x U'(x) \leq -\frac{\alpha x}{x+1} U(x)$, puis en déduire que $U|_I \in \mathcal{R}^{-\alpha}.$

Q.50 ▷ Montrer que U est intégrable sur I et que $\int_1^{+\infty} U(x) dx = \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L(n)}{n(n+1)^{\alpha-1}}.$

★ Fin de l'épreuve ★

