République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2026

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2026

AVIS IMPORTANT AUX CANDIDATS

Ce cahier d'examen **est strictement personnel**. Il ne doit comporter **aucun signe distinctif**.
Les réponses doivent être rédigées en **noir** ou en **bleu**.
Le **non respect** de l'une de ces recommandations peut conduire à l'attribution de la note **ZERO** à la copie.

Case à cocher si le candidat est absent

☐

CONCOURS : **Mathématiques et physique**

EPREUVE DE : **Mathématiques II**

DATE :**09-06-2026 à 8 H 00** DURÉE : **3 HEURES**

NOM : .....

PRÉNOM : .....

DATE DE NAISSANCE : .....

N° de C.I.N/PASSEPORT pour les étrangers : .....

SÉRIE : .....

IDENTIFIANT : .....

Signature des enseignants	

Signature du candidat

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2026

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2026

Concours Mathématiques et Physique
Épreuve de Mathématiques II

Session 2026	Date : 09/06/2026	Durée : 4 heures

Feuilles de réponses

Notations et définitions :

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) l'espace des matrices carrées d'ordre n (resp. l'espace des matrices unicolonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{K}$ et par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note ${}^tA$ la transposée d'une matrice A, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note I_n la matrice unité d'ordre n.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, χ_M est le polynôme caractéristique de M, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ est l'ensemble des valeurs propres complexes de M et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ est l'ensemble des valeurs propres réelles de M.
De plus, $\mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Ker}(M)$ sont respectivement l'image et le noyau de M définis par

$$\mathrm{Im}(M) = \{MX, \quad X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad MX = 0\}.$$

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on rappelle que l'exponentielle de M est $e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

Si $A_1, \ldots, A_p$ sont des matrices carrées, on note $\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_p)$ la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont A_1 jusqu'à A_p dans l'ordre.

Lorsque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, id_E est l'endomorphisme identité de E et pour un endomorphisme u de E, on note $M_{\mathcal{B}}(u)$ sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E.

Les espaces $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ sont munis de leurs produits scalaires usuels qui seront, les deux, notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$. De façon équivalente, les normes euclidiennes associées sont, les deux, notées $\| \cdot \|_2$.
On rappelle que le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $\langle X, Y \rangle = {}^tX\,Y$ pour tous vecteurs X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Partie I : Préliminaires

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathbb{J}(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Q.1 ▷ Montrer que $\mathbb{J}(a,b)\ {}^t\mathbb{J}(a,b) = {}^t\mathbb{J}(a,b)\,\mathbb{J}(a,b)$.

Q.2 ▷ Déterminer $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{J}(a,b)\right)$ et montrer que $\mathbb{J}(a,b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.3 ▷ Vérifier que ${}^tM\,M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\|_2^2 = \langle X, {}^tM\,MX\rangle$. Déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}({}^tM\,M) \subset [0, +\infty]$.

Q.4 ▷ Montrer que si ${}^tM\,M = 0$ alors $M = 0$.

Q.5 ▷ Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine réelle.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Partie II : Rayon spectral et norme subordonnée

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit

$$\rho(M) = \max\left\{|\lambda|, \quad \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)\right\} \quad \text{et} \quad \|M\| = \max\left\{\|MX\|_2, \quad X \in \mathbf{S_n}\right\}$$

où $\mathbf{S_n} = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\|_2 = 1\right\}$.

Q.6 ▷ Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M^k) = \left\{\lambda^k, \quad \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)\right\}$.

En déduire que $\rho(M^k) = \rho(M)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q.7 ▷ Justifier l'existence de $\|M\|$ et montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\|_2 \leq \|M\|\,\|X\|_2$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

On admet que l'application $\|\cdot\| : M \longmapsto \|M\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\|M_1 M_2\| \leq \|M_1\| \, \|M_2\| \text{ pour toutes matrices } M_1, M_2 \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On considère, dans la suite, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad X \longmapsto \|AX\|_2^2 - \|A\|^2 \, \|X\|_2^2.$$

Q.8 ▷ Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la différentielle de f au point X est donnée par

$$Df(X)H = 2\,\langle {}^t\!A\,AX, H\rangle - 2\|A\|^2\,\langle X, H\rangle, \quad \forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Q.9 ▷ Soit $X_0 \in \mathbf{S}_n$ tel que $\|A\| = \|AX_0\|_2$. Vérifier que $f(X_0) = \max\limits_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f(X)$.

Déduire que $\|A\|^2$ est une valeur propre de ${}^t\!A\,A$.

Q.10 ▷ Montrer que

$$\|A\|^2 = \rho({}^t\!A\,A).$$

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

.....

.....

.....

.....

Q.11 ▷ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\|\mathbb{J}(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Partie III : Matrices normales

Définition : Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **normale** si ${}^tM\,M = M\,{}^tM$. On note $\mathbf{H}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices **normales** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A)

On pose $\Gamma_2 = \{\mathbb{J}(a,b), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Q.12 ▷ Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $b^2 - c^2 = 0$ et $(a-d)(b-c) = 0$. Déduire que $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ ou $A \in \Gamma_2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q.13 ▷ Établir que $\mathbf{H}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cup \Gamma_2$ et que toute matrice $A \in \mathbf{H}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

B)

Dans les deux questions suivantes, soit $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$.

Q.14 ▷ Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x\,{}^t\!A} e^{xA} = e^{x(A+{}^t\!A)}$ puis montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|e^{xA}\|^2 = \rho\left(e^{x(A+{}^t\!A)}\right)$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.15 ▷ Soit $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une solution sur $\mathbb{R}$ du système différentiel

$$Z'(x) = AZ(x).$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \|Y(x)\|_2 \leq \sqrt{\rho\left(e^{x({}^tA + {}^tA)}\right)}\, \|Y(0)\|_2$.

Dans la suite de cette partie, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère la fonction $\psi_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi_A(x) = e^{x\,{}^tA}\, e^{xA}.$$

Q.16 ▷ Justifier brièvement que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la fonction $f_M : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{xM}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f_M''(x) = M^2\, e^{xM}$.
Montrer alors que ψ_A est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\psi_A{}''(0) = ({}^tA)^2 + 2\,{}^tA\,A + A^2.$$

Q.17 ▷ Déduire que $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x\,{}^t\!A}\, e^{xA} = e^{x(A+{}^t\!A)}$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

C)

On rappelle que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$, alors, pour tout $(k,\ m) \in \mathbb{N}^2$, on a $A^k\, B^m = B^m\, A^k$ et $(AB)^k = A^k\, B^k$.

Soit $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$.

Q.18 ▷ Vérifier que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A) \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q.19 ▷ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\|A^k\| = \|A\|^k$. (On pourra utiliser la question **Q.10**)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q.20 ▷ Vérifier que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|{}^tAX\|_2 = \|AX\|_2$. En déduire que $\mathrm{Ker}({}^tA) = \mathrm{Ker}(A)$ puis que $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A)$, où $\mathrm{Im}(A)^\perp$ est l'orthogonal de $\mathrm{Im}(A)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.21 ▷ Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(A^k) = \mathrm{Ker}(A)$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.22 ▷ Montrer que la matrice nulle est l'unique matrice nilpotente appartenant à $\mathbf{H}_n(\mathbb{R})$.

Q.23 ▷ On considère un sous-groupe fini G du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $G \subset \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $M \in G$, $({}^tM\,M)^k = I_n$. Déduire que $G \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Partie IV : Norme subordonnée d'une matrice normale

A)

Q.24 ▷ Soit $(A, M) \in (\mathbf{H}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $M = QAQ^{-1}$ où $Q \in GL_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|M\|^k \leq c\,\|A\|^k$.
Déduire que $\|M\| \leq \|A\|$ puis que $\|M\| = \|A\|$.

On considère, dans la suite de cette partie, une matrice $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$.

Q.25 ▷ Montrer que si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\|A\| = \rho(A)$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

On suppose, dans les deux questions suivantes, que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les racines réelles deux à deux distinctes de χ_A et on pose $P = \prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_k)$.

Q.26 ▷ Montrer que $P(A)$ est nilpotente.

Q.27 ▷ Montrer alors que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déduire que $\|A\| = \rho(A)$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

B)

Q.28 ▷ Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathrm{H}_2(\mathbb{R})$, on a $\|A\| = \rho(A)$.

On se propose, dans la suite de cette partie, de démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathrm{H}_3(\mathbb{R})$, on a la relation

$$\|A\| = \rho(A).$$

Le résultat est démontré dans le cas où χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. On considère alors une matrice $A \in \mathrm{H}_3(\mathbb{R})$ telle que χ_A ne soit pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Q.29 ▷ Montrer que $\chi_A = (X - \lambda)(X^2 - 2aX + c)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(c, a) \in \mathbb{R}^2$ tels que $c - a^2 > 0$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Q.30 ▷ Justifier que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3}) \bigoplus \mathrm{Ker}(u^2 - 2au + c\, id_{\mathbb{R}^3})$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(u^2 - 2au + c\, id_{\mathbb{R}^3})$.

Soient $b = \sqrt{c - a^2}$, $x_1 \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3}) \setminus \{0\}$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(u^2 - 2au + c\, id_{\mathbb{R}^3}) \setminus \{0\}$.

Q.31 ▷ Montrer que $(u - a\, id_{\mathbb{R}^3})(x_2) \in \mathrm{Ker}(u^2 - 2au + c\, id_{\mathbb{R}^3})$ et que $(u - a\, id_{\mathbb{R}^3})^2(x_2) = -b^2 x_2$.

Q.32 ▷ Montrer que $\mathcal{B} = \left(x_1, x_2, \dfrac{(u - a\, id_{\mathbb{R}^3})(x_2)}{b}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

On pose $\mathbf{J}(\lambda, a, b) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$.

Q.33 ▷ Montrer que $M_{\mathcal{B}}(u) = \mathbf{J}(\lambda, a, b)$ et vérifier que $\mathbf{J}(\lambda, a, b) \in \mathbf{H}_3(\mathbb{R})$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.34 ▷ Montrer alors que $\|A\| = \max\left\{|\lambda|, \sqrt{c}\right\} = \rho(A)$.

C)

On se propose de démontrer que la relation $\|A\| = \rho(A)$ est vraie pour toute matrice $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

Q.35 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $M = \operatorname{diag}(M_1, \ldots, M_r)$ avec $M_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R})$, $n_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Montrer que $\rho(M) = \max\{\rho(M_1), \ldots, \rho(M_r)\}$.

Q.36 ▷ Soient $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0, +\infty]$ et on pose $M = \sqrt{\lambda}\, V$. Justifier l'existence d'une matrice $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = Q \operatorname{diag}(M_1, \ldots, M_r)\, Q^{-1}$ où, pour tout $1 \leq i \leq r$, $M_i \in \{\sqrt{\lambda}, -\sqrt{\lambda}\}$ ou bien $M_i = \mathbb{J}\left(\sqrt{\lambda}\cos(\theta_i), \sqrt{\lambda}\sin(\theta_i)\right)$, $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
Déduire que $\rho(M) = \sqrt{\lambda}$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

On considère, dans la suite, une matrice $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à ${}^tA\,A$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de ${}^tA\,A$. Pour tout $1 \leq i \leq r$, on considère une base orthonormée $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(w)$ et on note $d_i = \dim E_{\lambda_i}(w)$ où $E_{\lambda_i}(w)$ est le sous-espace propre de w associé à la valeur propre λ_i.

Q.37 ▷ Justifier que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(w)$ et que, pour tout $1 \leq i \leq r$, $E_{\lambda_i}(w)$ est stable par u.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q.38 ▷ Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $M_{\mathcal{B}}(w) = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \ldots, \lambda_r I_{d_r})$ et $M_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_r)$ où, pour tout $1 \leq i \leq r$, $A_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{R})$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Soit Q la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^n$ à la base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

Q.39 ▷ En exprimant A en fonction de la matrice Q et les matrices $A_1, \ldots, A_r$, montrer que, pour tout $1 \leq i \leq r$, ${}^t\!A_i\, A_i = \lambda_i I_{d_i}$.

Q.40 ▷ Soit $1 \leq i \leq r$. Montrer qu'il existe une matrice $V_i \in \mathcal{O}_{d_i}(\mathbb{R})$ telle que $A_i = \sqrt{\lambda_i}\, V_i$. Déduire que $\rho(A_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.41 ▷ Montrer alors que $\|A\| = \rho(A)$.

Q.42 ▷ On note $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et on pose, pour $1 \leq i \leq n$, $\quad L_i(A) = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$.

Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty \max_{1\leq i\leq n} L_i(A).$$

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Espace supplémentaire pour les réponses

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2026

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2026

Concours Mathématiques et Physique
Épreuve de Mathématiques II

Session 2026	Date : 09/06/2026	Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice et tout autre dispositif électronique est interdit.

Rédigez vos réponses exclusivement dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. En cas de manque de place, utilisez l'espace supplémentaire situé à la fin du cahier, en précisant le numéro de la question et en indiquant clairement dans l'espace initial que votre réponse se poursuit en annexe. Si vous détectez une erreur ou une incohérence dans l'énoncé, signalez-la impérativement sur votre copie tout en poursuivant votre travail.

Notations et définitions :

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) l'espace des matrices carrées d'ordre n (resp. l'espace des matrices unicolonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{K}$ et par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note ${}^tA$ la transposée d'une matrice A, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note I_n la matrice unité d'ordre n.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, χ_M est le polynôme caractéristique de M, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ est l'ensemble des valeurs propres complexes de M et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ est l'ensemble des valeurs propres réelles de M.
De plus, $\mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Ker}(M)$ sont respectivement l'image et le noyau de M définis par

$$\mathrm{Im}(M) = \{MX, \quad X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad MX = 0\}.$$

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on rappelle que l'exponentielle de M est $e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

Si $A_1, \ldots, A_p$ sont des matrices carrées, on note $\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_p)$ la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont A_1 jusqu'à A_p dans l'ordre.

Lorsque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, id_E est l'endomorphisme identité de E et pour un endomorphisme u de E, on note $M_{\mathcal{B}}(u)$ sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E.

Les espaces $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ sont munis de leurs produits scalaires usuels qui seront, les deux, notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$. De façon équivalente, les normes euclidiennes associées sont, les deux, notées $\| \cdot \|_2$.
On rappelle que le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $\langle X, Y \rangle = {}^tX\,Y$ pour tous vecteurs X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Partie I : Préliminaires

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathbf{J}(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Q.1 ▷ Montrer que $\mathbf{J}(a,b)\ {}^t\mathbf{J}(a,b) = {}^t\mathbf{J}(a,b)\,\mathbf{J}(a,b)$.

Q.2 ▷ Déterminer $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}\left(\mathbf{J}(a,b)\right)$ et montrer que $\mathbf{J}(a,b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.3 ▷ Vérifier que ${}^tM\,M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\|_2^2 = \langle X, {}^tM\,MX\rangle$. Déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}({}^tM\,M) \subset [0,+\infty[$.

Q.4 ▷ Montrer que si ${}^tM\,M = 0$ alors $M = 0$.

Q.5 ▷ Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine réelle.

Partie II : Rayon spectral et norme subordonnée

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit

$$\rho(M) = \max\left\{|\lambda|,\quad \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)\right\} \quad \text{et} \quad \|M\| = \max\left\{\|MX\|_2,\quad X \in \mathbf{S_n}\right\}$$

où $\mathbf{S_n} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad \|X\|_2 = 1\}$.

Q.6 ▷ Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M^k) = \left\{\lambda^k,\quad \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)\right\}$.
En déduire que $\rho(M^k) = \rho(M)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q.7 ▷ Justifier l'existence de $\|M\|$ et montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\|_2 \leq \|M\|\,\|X\|_2$.

On admet que l'application $\|\cdot\| : M \longmapsto \|M\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :
$\|M_1\,M_2\| \leq \|M_1\|\,\|M_2\|$ *pour toutes matrices M_1, M_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

On considère, dans la suite, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\quad X \longmapsto \|AX\|_2^2 - \|A\|^2\,\|X\|_2^2.$$

Q.8 ▷ Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la différentielle de f au point X est donnée par

$$Df(X)H = 2\,\langle {}^tA\,AX, H\rangle - 2\|A\|^2\,\langle X, H\rangle,\quad \forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Q.9 ▷ Soit $X_0 \in \mathbf{S_n}$ tel que $\|A\| = \|AX_0\|_2$. Vérifier que $f(X_0) = \max\limits_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f(X)$.
Déduire que $\|A\|^2$ est une valeur propre de ${}^tA\,A$.

Q.10 ▷ Montrer que

$$\|A\|^2 = \rho({}^tA\,A).$$

Q.11 ▷ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\|\mathbf{J}(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Partie III : Matrices normales

Définition : Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **normale** si ${}^tM\,M = M\,{}^tM$. On note $\mathbf{H}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices **normales** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.36 ▷ Soient $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in [0, +\infty[$ et on pose $M = \sqrt{\lambda}\, V$. Justifier l'existence d'une matrice $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = Q \operatorname{diag}(M_1, \ldots, M_r)\, Q^{-1}$ où, pour tout $1 \leq i \leq r$, $M_i \in \{\sqrt{\lambda}, -\sqrt{\lambda}\}$ ou bien $M_i = \mathbf{J}\left(\sqrt{\lambda}\cos(\theta_i), \sqrt{\lambda}\sin(\theta_i)\right)$, $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
Déduire que $\rho(M) = \sqrt{\lambda}$.

On considère, dans la suite, une matrice $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à ${}^t\!A\, A$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de ${}^t\!A\, A$. Pour tout $1 \leq i \leq r$, on considère une base orthonormée $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(w)$ et on note $d_i = \dim E_{\lambda_i}(w)$ où $E_{\lambda_i}(w)$ est le sous-espace propre de w associé à la valeur propre λ_i.

Q.37 ▷ Justifier que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(w)$ et que, pour tout $1 \leq i \leq r$, $E_{\lambda_i}(w)$ est stable par u.

Q.38 ▷ Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $M_{\mathcal{B}}(w) = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \ldots, \lambda_r I_{d_r})$ et $M_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_r)$ où, pour tout $1 \leq i \leq r$, $A_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{R})$.

Soit Q la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^n$ à la base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

Q.39 ▷ En exprimant A en fonction de la matrice Q et les matrices $A_1, \ldots, A_r$, montrer que, pour tout $1 \leq i \leq r$, ${}^t\!A_i\, A_i = \lambda_i I_{d_i}$.

Q.40 ▷ Soit $1 \leq i \leq r$. Montrer qu'il existe une matrice $V_i \in \mathcal{O}_{d_i}(\mathbb{R})$ telle que $A_i = \sqrt{\lambda_i}\, V_i$. Déduire que $\rho(A_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

Q.41 ▷ Montrer alors que $\|A\| = \rho(A)$.

Q.42 ▷ On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et on pose, pour $1 \leq i \leq n$, $L_i(A) = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$.
Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|AX\|_2 \leq \|X\|_2 \max_{1 \leq i \leq n} L_i(A).$$

⋆ Fin de l'épreuve ⋆

A)

On pose $\Gamma_2 = \{\mathbb{J}(a,b), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Q.12 ▷ Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $b^2 - c^2 = 0$ et $(a-d)(b-c) = 0$. Déduire que $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ ou $A \in \Gamma_2$.

Q.13 ▷ Établir que $\mathbf{H}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cup \Gamma_2$ et que toute matrice $A \in \mathbf{H}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

B)

Dans les deux questions suivantes, soit $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$.

Q.14 ▷ Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad e^{x\,{}^t\!A} e^{xA} = e^{x(A+{}^t\!A)}$ puis montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|e^{xA}\|^2 = \rho\left(e^{x(A+{}^t\!A)}\right)$.

Q.15 ▷ Soit $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une solution sur $\mathbb{R}$ du système différentiel

$$Z'(x) = AZ(x).$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \|Y(x)\|_2 \leq \sqrt{\rho\left(e^{x(A+{}^t\!A)}\right)}\, \|Y(0)\|_2$.

Dans la suite de cette partie, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère la fonction $\psi_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi_A(x) = e^{x\,{}^t\!A} e^{xA}.$$

Q.16 ▷ Justifier brièvement que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la fonction $f_M : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{xM}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f_M''(x) = M^2 e^{xM}$.
Montrer alors que ψ_A est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\psi_A{}''(0) = ({}^t\!A)^2 + 2\,{}^t\!A\,A + A^2.$$

Q.17 ▷ Déduire que $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x\,{}^t\!A} e^{xA} = e^{x(A+{}^t\!A)}$.

C)

On rappelle que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$, alors, pour tout $(k, m) \in \mathbf{N}^2$, on a $A^k B^m = B^m A^k$ et $(AB)^k = A^k B^k$.

Soit $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$.

Q.18 ▷ Vérifier que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A) \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$.

Q.19 ▷ Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\|A^k\| = \|A\|^k$. (On pourra utiliser la question **Q.10**)

Q.20 ▷ Vérifier que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\quad \|{}^t\!AX\|_2 = \|AX\|_2$. En déduire que $\mathrm{Ker}({}^t\!A) = \mathrm{Ker}(A)$ puis que $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A)$, où $\mathrm{Im}(A)^\perp$ est l'orthogonal de $\mathrm{Im}(A)$.

Q.21 ▷ Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\quad \mathrm{Ker}(A^k) = \mathrm{Ker}(A)$.

Q.22 ▷ Montrer que la matrice nulle est l'unique matrice nilpotente appartenant à $\mathbf{H}_n(\mathbf{R})$.

Q.23 ▷ On considère un sous-groupe fini G du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $G \subset \mathbf{H}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout $M \in G$, $\quad ({}^t\!M\,M)^k = I_n$. Déduire que $G \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Partie IV : Norme subordonnée d'une matrice normale

A)

Q.24 ▷ Soit $(A, M) \in (\mathbf{H}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $M = QAQ^{-1}$ où $Q \in GL_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|M\|^k \leq c\,\|A\|^k$.
Déduire que $\|M\| \leq \|A\|$ puis que $\|M\| = \|A\|$.

On considère, dans la suite de cette partie, une matrice $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$.

Q.25 ▷ Montrer que si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\|A\| = \rho(A)$.

On suppose, dans les deux questions suivantes, que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ les racines réelles deux à deux distinctes de χ_A et on pose $P = \prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_k)$.

Q.26 ▷ Montrer que $P(A)$ est nilpotente.

Q.27 ▷ Montrer alors que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déduire que $\|A\| = \rho(A)$.

B)

Q.28 ▷ Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathbf{H}_2(\mathbb{R})$, on a $\|A\| = \rho(A)$.

On se propose, dans la suite de cette partie, de démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathbf{H}_3(\mathbb{R})$, on a la relation

$$\|A\| = \rho(A).$$

Le résultat est démontré dans le cas où χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. On considère alors une matrice $A \in \mathbf{H}_3(\mathbb{R})$ telle que χ_A ne soit pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Q.29 ▷ Montrer que $\chi_A = (X - \lambda)(X^2 - 2aX + c)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(c, a) \in \mathbb{R}^2$ tels que $c - a^2 > 0$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Q.30 ▷ Justifier que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3}) \bigoplus \mathrm{Ker}(u^2 - 2au + c\, id_{\mathbb{R}^3})$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(u^2 - 2au + c\, id_{\mathbb{R}^3})$.

Soient $b = \sqrt{c - a^2}$, $x_1 \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3}) \setminus \{0\}$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(u^2 - 2au + c\, id_{\mathbb{R}^3}) \setminus \{0\}$.

Q.31 ▷ Montrer que $(u - a\, id_{\mathbb{R}^3})(x_2) \in \mathrm{Ker}(u^2 - 2au + c\, id_{\mathbb{R}^3})$ et que $(u - a\, id_{\mathbb{R}^3})^2(x_2) = -b^2 x_2$.

Q.32 ▷ Montrer que $\mathcal{B} = \left(x_1, x_2, \dfrac{(u - a\, id_{\mathbb{R}^3})(x_2)}{b}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On pose $\mathbf{J}(\lambda, a, b) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$.

Q.33 ▷ Montrer que $M_{\mathcal{B}}(u) = \mathbf{J}(\lambda, a, b)$ et vérifier que $\mathbf{J}(\lambda, a, b) \in \mathbf{H}_3(\mathbb{R})$.

Q.34 ▷ Montrer alors que $\|A\| = \max\left\{|\lambda|, \sqrt{c}\right\} = \rho(A)$.

C)

On se propose de démontrer que la relation $\|A\| = \rho(A)$ est vraie pour toute matrice $A \in \mathbf{H}_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

Q.35 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $M = \mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_r)$ avec $M_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R})$, $n_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $1 \leq i \leq r$. Montrer que $\rho(M) = \max\{\rho(M_1), \ldots, \rho(M_r)\}$.