



AVIS IMPORTANT AUX CANDIDATS

Ce cahier d'examen est strictement personnel. Il ne doit comporter aucun signe distinctif.
Les réponses doivent être rédigées en noir ou en bleu.
Le non respect de l'une de ces recommandations peut conduire à l'attribution de la note **ZERO** à la copie.

Case à cocher si le
candidat est absent

☐

CONCOURS : Biologie et Géologie

EPREUVE DE : Mathématiques

DATE : 02-06-2026 à 08 H 00

DURÉE : 3 HEURES

NOM :

PRÉNOM :

DATE DE NAISSANCE :

N° de C.I.N/PASSEPORT pour les étrangers :

SÉRIE :

IDENTIFIANT :

Signature des enseignants

--	--

Signature du candidat

--



Concours Biologie et Géologie
Épreuve de Mathématiques

Session 2026	Date : 02/06/2026	Durée : 3 heures
--------------	-------------------	------------------

Feuilles de réponses

Exercice I

- On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique notée $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ et du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- On note par $id_{\mathbb{R}^3}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
- On désigne par $\| \cdot \|$ la norme euclidienne.

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On définit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v - u.$$

Q.1 ▷ Vérifier que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, $\langle f(u), v \rangle = \langle u, v \rangle$.

Q.2 ▷ Calculer $f \circ f$. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner f^{-1} .

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.3 ▷ Préciser $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Dans la suite, on pose $v = (-1, -1, 1)$.

Q.4 ▷ Vérifier que la matrice A de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}_c$ est donnée par

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.5 $\triangleright$ La matrice A est-elle diagonalisable? Justifier.

Q.6▷ Soient $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

[illegible][illegible]

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $p = \frac{1}{2}(f + id_{\mathbb{R}^3})$.

Q.8 ▷ Vérifier que la matrice Q de p relativement à la base canonique $\mathcal{B}_c$ est donnée par

Q.9 ▷ Calculer Q^2 . En déduire les valeurs propres de p .

Q.10 ▷ En utilisant Q.9, retrouver les valeurs propres de f .

Q.11 ▷ Déterminer $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$. Déduire que p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

Soient $v'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $v'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)$ et $v'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Q.12 ▷ Vérifier que (v'_1, v'_2) est une base orthonormale de $\text{Ker}(p)$.

Q.13 ▷ Déterminer la matrice M de p relativement à la base $\mathcal{B}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$.

Q.14 ▷ Écrire dans la base $\mathcal{B}'$ la matrice M' de la projection orthogonale sur $\text{Ker}(p)$.

On considère $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par :

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1,$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -\frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n - \frac{2}{3}z_n, \\ y_{n+1} &= \frac{2}{3}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{2}{3}z_n, \\ z_{n+1} &= -\frac{2}{3}x_n - \frac{2}{3}y_n - \frac{1}{3}z_n. \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q.15 ▷ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $X_{n+1} = AX_n$.

Q.16 ▷ En utilisant la formule du binôme, calculer A^n en fonction de $Q^k; k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Q.17 ▷ Vérifier que $A^n = (-1)^n I_3 + (-1)^n Q \sum_{k=1}^n C_n^k (-2)^k$.

Q.18 ▷ En déduire que pour tout $p \geq 0$, $A^{2p} = I_3$ et $A^{2p+1} = A$.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Q.19 ▷ Déterminer les expressions de x_n , y_n et z_n en fonction de n .

Exercice II

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose

$$Y_i = 1 + (e - 1)X_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) \quad \text{et} \quad M_n = \left(\prod_{i=1}^n Y_i \right)^{\frac{1}{n}}; \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Q.20 ▷ Déterminer la loi de Y_i .

Q.21 ▷ Déduire la loi de $T_i = \ln(Y_i)$ et préciser son espérance et sa variance.

Q.22 ▷ Les variables aléatoires $(\ln(Y_i))_{1 \leq i \leq n}$ sont elles indépendantes ? Justifier.

Q.23 ▷ Trouver l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$ de la variable S_n .

Q.24 ▷ Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que la variable aléatoire S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p .

[illegible]

Q.25 ▷ Déterminer une relation entre S_n et M_n .

.....

.....

.....

.....

.....

Q.26 ▷ À l'aide du théorème du transfert, calculer $E(M_n)$, $E(M_n^2)$ puis déduire $V(M_n)$.

[illegible]

On dispose d'un échantillon $(T_1, \dots, T_n)$, $n \geq 1$ de variables aléatoires de même loi que X_i .

Soit $\bar{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$.

Q.27 ▷ Vérifier que $\bar{T}_n$ est un estimateur sans biais de p .

.....

.....

.....

.....

Q.28 ▷ Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\bar{T}_n - t \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \bar{T}_n + t \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) = 2\Phi(t) - 1,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q.29 ▷ On admet que $p(1-p) < \frac{1}{4}$ et on donne $\Phi(2,33) = 0,99$.

Déterminer un intervalle de confiance de p de niveau de confiance 98%.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

[illegible]
$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; \quad i \neq j, \quad \text{Cov}(Z_i, Z_j) = \begin{cases} p(1-p) & \text{si } j = i+1 \text{ ou } j = i-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE ICI

.....

.....

.....

[illegible]

Exercice III

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\theta}{(1-t)^{1-\theta}} & \text{si } t \in [0, 1[, \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[. \end{cases}$$

Q.34 ▷ Pour $x \in [0, 1[$, calculer $\int_0^x f(t) dt$.

Q.35 ▷ En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ est convergente et donner sa valeur.

.....

.....

.....

.....

Q.36 ▷ Montrer que f est une densité de probabilité.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Soit X la variable aléatoire réelle admettant f comme densité de probabilité.

Q.37 ▷ Déterminer la fonction de répartition F de X .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Soit $Y = -\ln(1 - X)$. On admet que Y est une variable aléatoire à densité.

Q.38 ▷ Exprimer la fonction de répartition G de Y en fonction de F .

.....

.....

.....

.....

Q.39 ▷ En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre θ .

Q.40 ▷ Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$.

Q.41 ▷ En déduire que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de θ .

Q.42 ▷ Exprimer X en fonction de Y , puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de θ .

On suppose maintenant que θ est inconnu. On dispose d'un échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ de variables indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\theta)$. On pose

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \quad \text{et} \quad M_n = \min(X_1, \dots, X_n),$$

où $X_1, \dots, X_n$ sont des variables indépendantes de même loi que X .

Q.43 ▷ Déterminer la fonction de répartition de M_n ainsi que sa fonction densité de probabilité.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q.44 ▷ Calculer le biais de l'estimateur M_n de θ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q.45 ▷ La variable aléatoire T_n est-elle un estimateur sans biais de $\frac{1}{\theta}$?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q.46 ▷ Calculer la variance $V(T_n)$.

Q.47 ▷ Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour T_n .

Q.48 ▷ En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\frac{1}{\theta} \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]\right) \geq 1 - \frac{1}{n\theta^2\varepsilon^2}.$$

Q.49 ▷ Prenons $n = 1000$. Trouver le plus petit ε tel que $[T_{1000} - \varepsilon, T_{1000} + \varepsilon]$ soit un intervalle de confiance pour $\frac{1}{\theta}$ de niveau au moins égal à 90%.

NE RIEN ÉCRIRE ICI

NE RIEN ÉCRIRE ICI

Espace supplémentaire pour les réponses

NE RIEN ÉCRIRE ICI

[illegible]

NE RIEN ÉCRIRE ICI

[illegible]

NE RIEN ÉCRIRE ICI

★ Fin de l'épreuve ★



Concours Biologie et Géologie
Épreuve de Mathématiques

Session 2026	Date : 02/06/2026	Durée : 3 heures
--------------	-------------------	------------------

L'usage d'une calculatrice **non programmable** est autorisé. Tout autre dispositif électronique est interdit.

Rédigez vos réponses exclusivement dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. En cas de manque de place, utilisez l'espace supplémentaire situé à la fin du cahier, en précisant le numéro de la question et en indiquant clairement dans l'espace initial que votre réponse se poursuit en annexe. Si vous détectez une erreur ou une incohérence dans l'énoncé, signalez-la impérativement sur votre copie tout en poursuivant votre travail.

Exercice I

- On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique notée $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ et du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- On note par $id_{\mathbb{R}^3}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
- On désigne par $\| \cdot \|$ la norme euclidienne.

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On définit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v - u.$$

Q.1 ▷ Vérifier que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, $\langle f(u), v \rangle = \langle u, v \rangle$.

Q.2 ▷ Calculer $f \circ f$. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner f^{-1} .

Q.3 ▷ Préciser $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Dans la suite, on pose $v = (-1, -1, 1)$.

Q.4 ▷ Vérifier que la matrice A de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}_c$ est donnée par

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.5 ▷ La matrice A est-elle diagonalisable? Justifier.

Q.6 ▷ Soient $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de vecteurs propres de A qu'on déterminera les valeurs propres associées.

Q.7 ▷ Donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ et la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $p = \frac{1}{2}(f + id_{\mathbb{R}^3})$.

Q.8 ▷ Vérifier que la matrice Q de p relativement à la base canonique $\mathcal{B}_c$ est donnée par

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.9 ▷ Calculer Q^2 . En déduire les valeurs propres de p .

Q.10 ▷ En utilisant Q.9, retrouver les valeurs propres de f .

Q.11 ▷ Déterminer $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$. Déduire que p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

Soient $v'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $v'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)$ et $v'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Q.12 ▷ Vérifier que (v'_1, v'_2) est une base orthonormale de $\text{Ker}(p)$.

Q.13 ▷ Déterminer la matrice M de p relativement à la base $\mathcal{B}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$.

Q.14 ▷ Écrire dans la base $\mathcal{B}'$ la matrice M' de la projection orthogonale sur $\text{Ker}(p)$.

On considère $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par :

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1,$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -\frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n - \frac{2}{3}z_n, \\ y_{n+1} &= \frac{2}{3}x_n - \frac{1}{3}y_n - \frac{2}{3}z_n, \\ z_{n+1} &= -\frac{2}{3}x_n - \frac{2}{3}y_n - \frac{1}{3}z_n. \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q.15 ▷ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $X_{n+1} = AX_n$.

Q.16 ▷ En utilisant la formule du binôme, calculer A^n en fonction de Q^k ; $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Q.17 ▷ Vérifier que $A^n = (-1)^n I_3 + (-1)^n Q \sum_{k=1}^n C_n^k (-2)^k$.

Q.18 ▷ En déduire que pour tout $p \geq 0$, $A^{2p} = I_3$ et $A^{2p+1} = A$.

Q.19 ▷ Déterminer les expressions de x_n , y_n et z_n en fonction de n .

Exercice II

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0, 1[$.

On pose

$$Y_i = 1 + (e - 1)X_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \ln(Y_i) \quad \text{et} \quad M_n = \left(\prod_{i=1}^n Y_i \right)^{\frac{1}{n}}; \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Q.20 ▷ Déterminer la loi de Y_i .

Q.21 ▷ Dédurre la loi de $T_i = \ln(Y_i)$ et préciser son espérance et sa variance.

Q.22 ▷ Les variables aléatoires $(\ln(Y_i))_{1 \leq i \leq n}$ sont-elles indépendantes? Justifier.

Q.23 ▷ Trouver l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$ de la variable S_n .

Q.24 ▷ Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que la variable aléatoire S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Q.25 ▷ Déterminer une relation entre S_n et M_n .

Q.26 ▷ À l'aide du théorème du transfert, calculer $E(M_n)$, $E(M_n^2)$ puis déduire $V(M_n)$.

On dispose d'un échantillon $(T_1, \dots, T_n)$, $n \geq 1$ de variables aléatoires de même loi que X_i .

$$\text{Soit } \bar{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i.$$

Q.27 ▷ Vérifier que $\bar{T}_n$ est un estimateur sans biais de p .

Q.28 ▷ Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\bar{T}_n - t \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \bar{T}_n + t \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) = 2\Phi(t) - 1,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Q.29 ▷ On admet que $p(1-p) < \frac{1}{4}$ et on donne $\Phi(2,33) = 0,99$.

Déterminer un intervalle de confiance de p de niveau de confiance 98%.

Soient $Z_k = T_k + T_{k+1}$; $k \geq 1$, une variable aléatoire réelle discrète et $W_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n Z_k$.

Q.30 ▷ Déterminer la loi de Z_k . Calculer $E(Z_k)$ et $V(Z_k)$.

Q.31 ▷ Montrer que la covariance des variables Z_i et Z_j aléatoires est donnée par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; \quad i \neq j, \quad \text{Cov}(Z_i, Z_j) = \begin{cases} p(1-p) & \text{si } j = i+1 \text{ ou } j = i-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q.32 ▷ Calculer l'espérance et la variance de la variable W_2 .

Q.33 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V(W_n) = \frac{(4n-2)p(1-p)}{4n^2}$.

Exercice III

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\theta}{(1-t)^{1-\theta}} & \text{si } t \in [0, 1[, \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[. \end{cases}$$

Q.34 ▷ Pour $x \in [0, 1[$, calculer $\int_0^x f(t) dt$.

Q.35 ▷ En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ est convergente et donner sa valeur.

Q.36 ▷ Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X la variable aléatoire réelle admettant f comme densité de probabilité.

Q.37 ▷ Déterminer la fonction de répartition F de X .

Soit $Y = -\ln(1 - X)$. On admet que Y est une variable aléatoire à densité.

Q.38 ▷ Exprimer la fonction de répartition G de Y en fonction de F .

Q.39 ▷ En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre θ .

Q.40 ▷ Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$.

Q.41 ▷ En déduire que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de θ .

Q.42 ▷ Exprimer X en fonction de Y , puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de θ .

On suppose maintenant que θ est inconnu. On dispose d'un échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ de variables indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\theta)$. On pose

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \quad \text{et} \quad M_n = \min(X_1, \dots, X_n),$$

où $X_1, \dots, X_n$ sont des variables indépendantes de même loi que X .

Q.43 ▷ Déterminer la fonction de répartition de M_n ainsi que sa fonction densité de probabilité.

Q.44 ▷ Calculer le biais de l'estimateur M_n de θ .

Q.45 ▷ La variable aléatoire T_n est-elle un estimateur sans biais de $\frac{1}{\theta}$?

Q.46 ▷ Calculer la variance $V(T_n)$.

Q.47 ▷ Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour T_n .

Q.48 ▷ En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\frac{1}{\theta} \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]\right) \geq 1 - \frac{1}{n\theta^2\varepsilon^2}.$$

Q.49 ▷ Prenons $n = 1000$. Trouver le plus petit ε tel que $[T_{1000} - \varepsilon, T_{1000} + \varepsilon]$ soit un intervalle de confiance pour $\frac{1}{\theta}$ de niveau au moins égal à 90%.

★ Fin de l'épreuve ★