REPUBLIQUE TUNISIENNE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs

Session 2025

الجمهورية التونسية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المناظرات الوطنية للدخول

إلى مراحل تكوين المهندسين

دورة 2025

Concours Physique et Chimie

Epreuve de Physique

Date : 02 Juin 2025 Heure : 8 H00 Durée : 4 H

- *Cette épreuve comporte 32 pages.*
- *Il n'est fourni au candidat qu'une seule et unique copie qui doit être rendue à la fin de l'épreuve même sans réponses.*
- *L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.*
- *L'épreuve comporte quatre parties pouvant être traitées de façon indépendante.*
- *Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat.*
- *Les résultats numériques sans unité ou avec une unité fausse ne seront pas comptabilisés.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Données :

- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F.m^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19} C$
- Masse de l'électron : $m = 9{,}10.10^{-31} kg$
- Constante de gravitation : $G = 7.10^{-11}\ N.m^2 kg^{-2}$
- Rayon de la terre : $R_T = 6400\ Km$
- Masse de la terre : $M_T = 6.10^{24}\ kg$
- Constante de Planck réduite : $\hbar = 1{,}05.10^{-34} J.s$
- Constante de Boltzmann : $K_B = 1{,}38\ 10^{-23}\ J.K^{-1}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-\alpha u^2) \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$
- Pour $\varepsilon \ll 1$, $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + n(n-1)\frac{\varepsilon^2}{2}$
- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Première partie : QCM

Cocher la ou les cases correspondantes aux bonnes réponses.

On considère une onde électromagnétique dans le vide de champ électrique en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = E_0(\vec{u}_x + i\vec{u}_y)e^{i\omega t}e^{-ikz}$$

Q1. Choisir parmi les réponses ci-dessous :

- ☐ C'est une onde plane progressive.
- ☐ C'est une onde polarisée rectilignement.
- ☐ C'est une onde stationnaire.
- ☐ C'est une onde polarisée circulairement.

Q2. Son champ magnétique vaut :

- ☐ $\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)}(\vec{u}_y - i\vec{u}_x)$
- ☐ $\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c}\left(\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_y + \sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_x\right)$
- ☐ $\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c} e^{i\omega t}e^{-ikz}(\vec{u}_y + i\vec{u}_x)$
- ☐ $\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c}\left(\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_x + i\sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_y\right)$

Q3. Dans un métal de conductivité $\gamma = 10^7\ S.m^{-1}$ et pour un champ électrique sinusoïdal de fréquence $f \ll 10^{14} Hz$.

- ☐ Le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant $\vec{j}$ (courant de conduction)
- ☐ Le champ magnétique $\vec{B}$ est nulle.
- ☐ La densité volumique de charge ρ est nulle.
- ☐ La densité d'énergie électromagnétique est nulle.

Q4. Un satellite est en mouvement circulaire autour de la terre à une altitude $H = 600Km$.

La vitesse de satellisation V_S et de libération V_L sont :

☐ $V_S \simeq 8\ Km.S^{-1}$ ☐ $V_S \simeq 8000\ Km.h^{-1}$

☐ $V_L = 2\ V_S$ ☐ $V_L = \sqrt{2}V_S$

Q5. Un cylindre infini d'axe (Oz) et de rayon R, à l'intérieur duquel existe une densité volumique de charge ρ constante. L'expression du champ électrostatique en tout point de l'espace est :

☐ $E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$ pour $r > R$ ☐ $E(r) = \frac{3\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$ pour $r > R$

☐ $E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r}$ pour $r < R$ ☐ $E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ pour $r < R$

Q6. On considère le filtre de Wien (**figure 1**) et on note $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$ sa fonction de transfert.

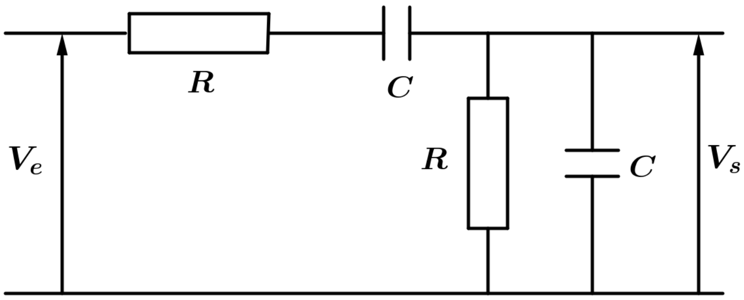

figure 1

☐ $\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{3}}{1+j\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)}$ ☐ $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{3+j\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)}$

☐ C'est un filtre passe bande ☐ C'est un filtre coupe bande

Q7. On considère un fluide en écoulement plan pour lequel la vitesse en coordonnées cartésiennes est : $\vec{v} = ay\vec{u}_x + bx\cos\omega t\,\vec{u}_y$. Avec a et b sont deux constantes positives.

Cet écoulement est :

☐ Stationnaire. ☐ Tourbillonnaire.

☐ Incompressible. ☐ Potentiel.

Q8. Une mole de gaz parfait subit une détente isotherme quasi statique de l'état initial (P_1, V_1, T_1) jusqu'à l'état final $\left(P_2 = \frac{P_1}{2}, V_2, T_1\right)$ le travail et la chaleur reçus sont :

☐ $W = -RT_1 ln2$ ☐ $Q = -RT_1 ln2$

☐ $W = RT_1 ln2$ ☐ $Q = RT_1 ln2$

<u>Deuxième partie</u> : phénomènes de transport

Ce problème est consacré à l'étude de quelques phénomènes de transport diffusif.

On note $\mathcal{D}$ la diffusivité particulaire, λ la conductivité thermique, γ la conductivité électrique et ν la viscosité cinématique.

Diffusion de particules – loi de Fick :

Considérons un cylindre infiniment long, de section S et d'axe (Ox) contenant un ensemble de particules dont la concentration n'est pas uniforme. Dans l'hypothèse d'une diffusion unidirectionnelle la densité particulaire $n(x,t)$ dépend de leur position le long de l'axe (Ox).

Q9. Rappeler la loi de Fick, les conditions de sa validité et justifier la présence du signe moins dans cette loi.

Q10. Effectuer un bilan de matière sur un volume élémentaire de section S et d'épaisseur dx et déduire l'équation de la diffusion :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

Q11. Par une analyse dimensionnelle, établir une relation qualitative exprimant la longueur caractéristique L du phénomène de diffusion en fonction de l'ordre de grandeur τ de sa durée et du coefficient de diffusion $\mathcal{D}$.

On étudie la diffusion, en régime permanent, des neutrons au cœur d'un réacteur nucléaire. On se limite à un problème à une dimension et on note $n(x)$ la densité neutronique.

On suppose qu'on a deux phénomènes qui se produisent dans le milieu fissile :

- ✓ La réaction de fission absorbe des neutrons et on considère qu'en moyenne $\dfrac{n(x)}{\tau}$ neutrons sont absorbés par unité de temps et de volume.
- ✓ La réaction produit de nouveaux neutrons et on considère que pour un neutron absorbé, il y a k neutrons produit ($k > 1$).

Q12. En faisant le bilan neutronique, dans une tranche de section S comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$, montrer que $n(x)$ vérifie l'équation différentielle : $0 = \mathcal{D}\dfrac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}x^2} + \alpha\, n(x)$ où α est une constante que l'on exprimera en fonction de k et τ.

....
....
....
....
....
....
....
....

Q13. Le milieu est limité par les plans d'abscisses $x = \pm d$ de sorte que $n(x = \pm d) = 0$, et on pose $n(x = 0) = n_0$.

Montrer que la densité neutronique se met sous la forme $n(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$.

Exprimer β en fonction de $\mathcal{D}$ et α.

À l'aide des conditions aux limites, déterminer les valeurs de A et B. Montrer que le régime permanent n'est possible que pour une valeur particulière de k que l'on exprimera en fonction de d, $\mathcal{D}$ et τ.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

………
………
………
………

Diffusion thermique – loi de Fourier :

Considérons un fil métallique cylindrique, homogène, de section droite S et de longueur L suffisamment grande pour qu'on puisse adapter une modélisation unidirectionnelle des transferts thermiques (**figure 2**). Le fil possède une conductivité thermique λ, une résitivité élecrique ρ, une masse volumique μ et une capacité thermique massique c.

On suppose que les parois latérales du fil sont calorifugées et que ses extrémités sont maintenues à des températures T_1 et T_2 (avec $T_1 > T_2$) imposées par des thermostats, avec $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$.

On note : $T(x,t)$ la température le long du fil.

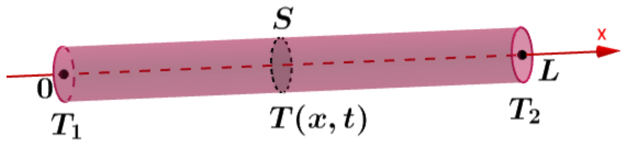

Figure 2

Q14. Rappeler la loi de Fourier et déterminer l'unité de λ.

Exprimer le flux (ou puissance) thermique ϕ_{th} traversant une section droite S du fil.

………
………
………
………
………
………
………

Q15. Effectuer un bilan d'énergie sur une tranche élémentaire du fil de section S et de longueur $\mathrm{d}x$. Déduire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x,t)$:

$$D_{th}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

D_{th} étant la diffusivité thermique. Déterminer l'expression de D_{th} et son unité.

………
………
………
………
………

On se place dans toute la suite en régime permanant.

Q16. Déterminer le profil de température, le tracer schématiquement et exprimer le flux thermique ϕ_2 cédée au thermostat de température T_2 en fonction de λ, S, T_1, T_2 et L.

Q17. En indiquant l'analogie thermique électrique. Exprimer la résistance thermique R_{th} du fil.

Le fil est maintenant parcouru par un courant électrique continu d'intensité I, répartie uniformement sur toute la section S.

On note que la résistivité ρ du fil est indépendante de la température et que le fil est assimilé à un conducteur ohmique ayant une résistance constante bien que la température $T(x)$ ne soit pas uniforme.

Q18. Par application de la loi d'Ohm, déterminer la résistance $\mathrm{d}R$ d'une tranche élémentaire du fil, de longueur $\mathrm{d}x$ et de section S. Déduire la puissance thermique volumique $\mathcal{P}_{th,V}$ produite au sein du fil, en fonction de I, S et ρ.

……
……
……
……
……
……

Q19. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$. Déterminer l'expression de $T(x)$ et celle de la densité volumique de courant thermique $j_{th}(x)$ en fonction de ρ, λ, S, T_1, T_2, L, x et I.

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Q20. Exprimer le flux thermique ϕ_{th} le long du fil, en fonction de $G = \frac{\lambda S}{L}$ sa conductance thermique, R sa résistance électrique et des autres données.

Tracer, avec $T_1 > T_2$, l'allure de la répartition du flux $\phi_{th}(x)$ en distinguant les cas où le terme $\frac{1}{2}RI^2$ est inférieur ou supérieur à la quantité $G(T_1 - T_2)$. Commenter.

……
……
……
……
……
……
……

Courbe $\phi_{th}(x)$

Q21. Déterminer la puissance thermique ϕ'_2 cédée au thermostat de température T_2.

Interpréter le résultat obtenu.

....

....

....

....

Diffusion dans un fluide visqueux

On néglige la pesanteur et on note que l'espace sera rapporté à un référentiel Galiléen $R(Oxyz)$.

Considérons deux plaques immobiles horizontales, infinies en longueur et en largeur, distantes de h et parallèles au plan (xOy). Un fluide visqueux, newtonien, incompressible de masse volumique μ et de viscosité dynamique η est confiné entre ces deux plaques. **(figure 3).**

À partir de l'instant pris pour origine $(t = 0)$, la plaque supérieure est mise en mouvement de translation horizontale à la vitesse constante $\vec{v} = v\vec{e}_x$ et les tranches de fluide, les unes après les autres, sont progressivement entrainées, en partant de cette plaque.

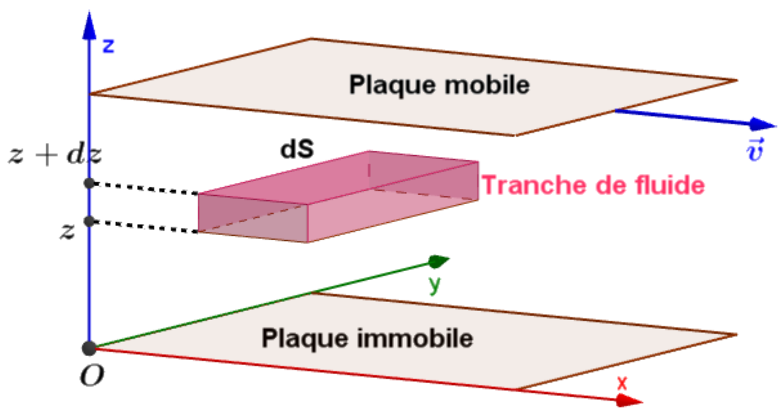

figure 3

On rappelle l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}P+\eta\Delta\vec{v}$$

Q22. Que représente cette équation. Préciser la signification de chacun de ses termes.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Q23. Montrer que la vitesse d'une particule fluide s'écrit : $\vec{V}=V(z,t)\vec{e}_x$.

....
....
....
....
....

Q24. La force de viscosité exercée sur la face inferieure de la tranche fluide à travers une surface dS située dans le plan $z=z_0$ est :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{vis}(z)=-\eta\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z_0}\mathrm{d}S\vec{e}_x$$

Représenter, sur un schéma les différentes forces de viscosité qui s'exercent sur la tranche fluide et déduire l'expression de la force volumique de viscosité.

....
....
....
....
....
....
....

………
………
………
………
………
………

Q25. On suppose que la pression est indépendante de x.

Montrer que la vitesse satisfait à une équation différentielle de type :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Identifier ν et préciser son unité, reconnaitre ce type de relation et analyser le mouvement du fluide.

………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………

Q26. Comparer le mouvement du fluide avec un éventuel mouvement de convection, quel coefficient faut-il introduire pour les différentier l'un de l'autre.

………
………
………
………
………
………
………
………
………

<u>Troisième partie</u> : Quelques manipulations avec l'interféromètre de Michelson :

La lumière se propage dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1.

On rappelle la formule de Fresnel donnant l'expression de l'intensité lumineuse en un point M où interfèrent deux ondes d'intensité respectives I_1 et I_2 : $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi$.

La **figure 4** présente les éléments constitutifs d'un interféromètre de Michelson.

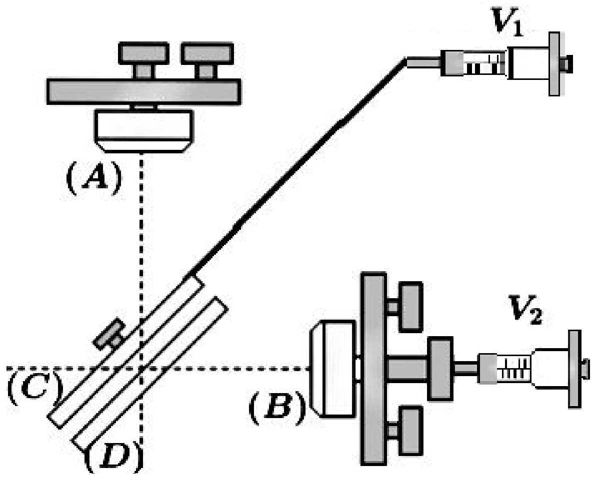

Figure 4

Q27. Préciser le nom et le rôle des éléments (A), (B), (C) et (D).

Indiquer les rôles des vis V_1 et V_2.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Configuration en lame d'air:

L'interféromètre de Michelson réglé en lame à faces parallèles est éclairé par une lampe à vapeur de mercure devant laquelle on a placé un diaphragme largement ouvert et un filtre interférentiel isolant la raie verte de longueur d'onde $\lambda_0 = 546{,}1nm$.

Q28. Où sont localisées les franges d'interférences ? les nommer.

Comment peut-on les observer sur un écran en utilisant une lentille de focale f'?

Indiquer également la méthode d'éclairage.

………

………

………
………
………
………
………

Q29. Expliquer par une figure comment peut on remplacer l'étude de l'interféromètre de Michelson par celle d'une lame d'air et représenter le cheminement des rayons lumineux interférant en un point M de l'écran.

Q30. Démontrer la différence de marche δ en fonction de l'inclinaison i des rayons et de l'épaisseur e de la lame .

………
………
………
………
………
………
………
………
………

Q31. On observe une frange brillante au centre de la figure d'interférence. Que peut-on dire de l'ordre d'interférence p_0 en ce point ?

On se place au voisinage de l'incidence normale déterminer le rayon r_n du $n^{ième}$ anneau brillant en fonction de λ_0, f', e et n. Conclure concernant la notion d'interfrange.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Q32. On dispose de trois lentilles de focales $5\ mm$, $20\ cm$ et $1\ m$. laquelle doit-on choisir pour projeter la figure d'interférence sur un écran ? justifier ce choix.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Q33. On varie l'épaisseur e de la lame, on observe l'évolution de la figure d'interférence.

Décrire comment varie l'épaisseur e et le sens de défilement des anneaux de l'image 1 à l'image 2 de la **figure 5**.

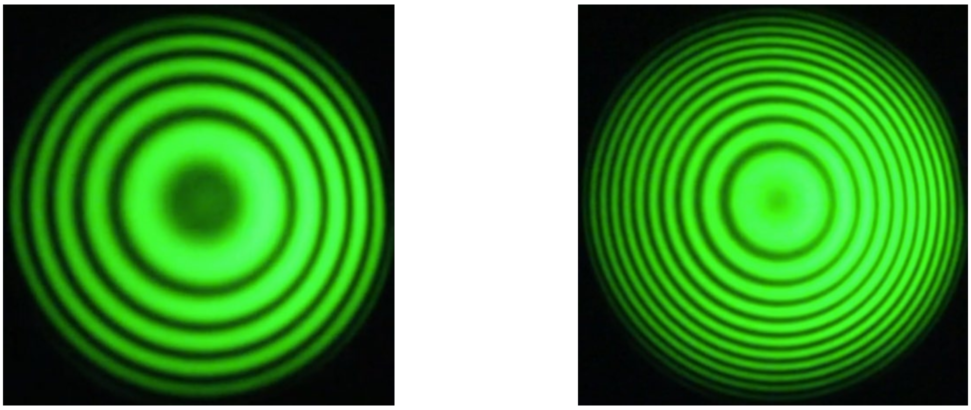

Image 1 **Figure 5** **Image 2**

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

……
……
……

La **figure 6** montre des interférogrammes observés avec différentes sources lumineuses :

(1) laser .

(2) lampe à mercure haute pression associée à un filtre isolant le doublet jaune.

(3) lampe à mercure haute pression associée à un filtre isolant la raie verte.

(4) lampe à sodium basse pression.

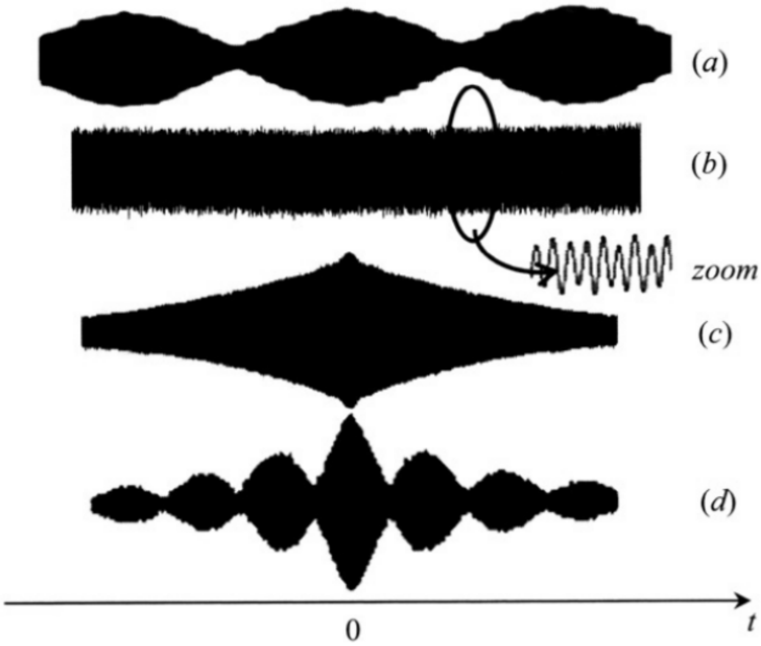

figure 6

On rappelle que l'écart $\Delta\lambda = 0.6\,nm$ pour le doublet jaune du sodium et celui du doublet jaune du mercure est $\Delta\lambda = 2\,nm$.

Q34. Indiquer la différence entre une lampe haute pression et une lampe basse pression.

En justifiant la réponse, associer chaque source à son interférogramme.

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

……

……

Le mercure possède un doublet dans le jaune de longueurs d'onde λ_1 et λ_2, on suppose que ces deux composantes ont la même intensité I_0 et sont de largeur spectrale nulle.

On cherche à déterminer expérimentalement les caractéristiques de ce doublet en utilisant l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air.

On note : $\lambda_m = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$ la longueur d'onde moyenne et $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ l'écart entre les deux longueurs d'onde. On suppose que $\Delta\lambda \ll \lambda_m$ et $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq \lambda_m$

On place au centre O des anneaux un capteur photoélectrique qui donne une tension proportionnelle à l'intensité lumineuse qu'il reçoit. Cette tension est enregistrée à l'aide d'un logiciel d'acquisition. A l'aide d'un moteur on translate le miroir mobile à vitesse constante $v = 0{,}56\mu m.s^{-1}$, ce qui permet de faire varier l'épaisseur de la lame d'air $e(t) = vt$ en partant du contact optique à l'instant $t = 0$.

Q35. Montrer que l'intensité résultante en O s'exprime sous la forme :

$$I(t) = I_0\left(1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\Delta t}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right)$$

où T_0 et $\Delta t \gg T_0$ sont des grandeurs homogènes à des temps, à exprimer en fonction de λ_m, $\Delta\lambda$ et v.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Q36. On donne les deux courbes suivantes qui représentent l'enregistrement obtenu. La première sur un temps court, la deuxième sur un temps long. (**Figure 7)**

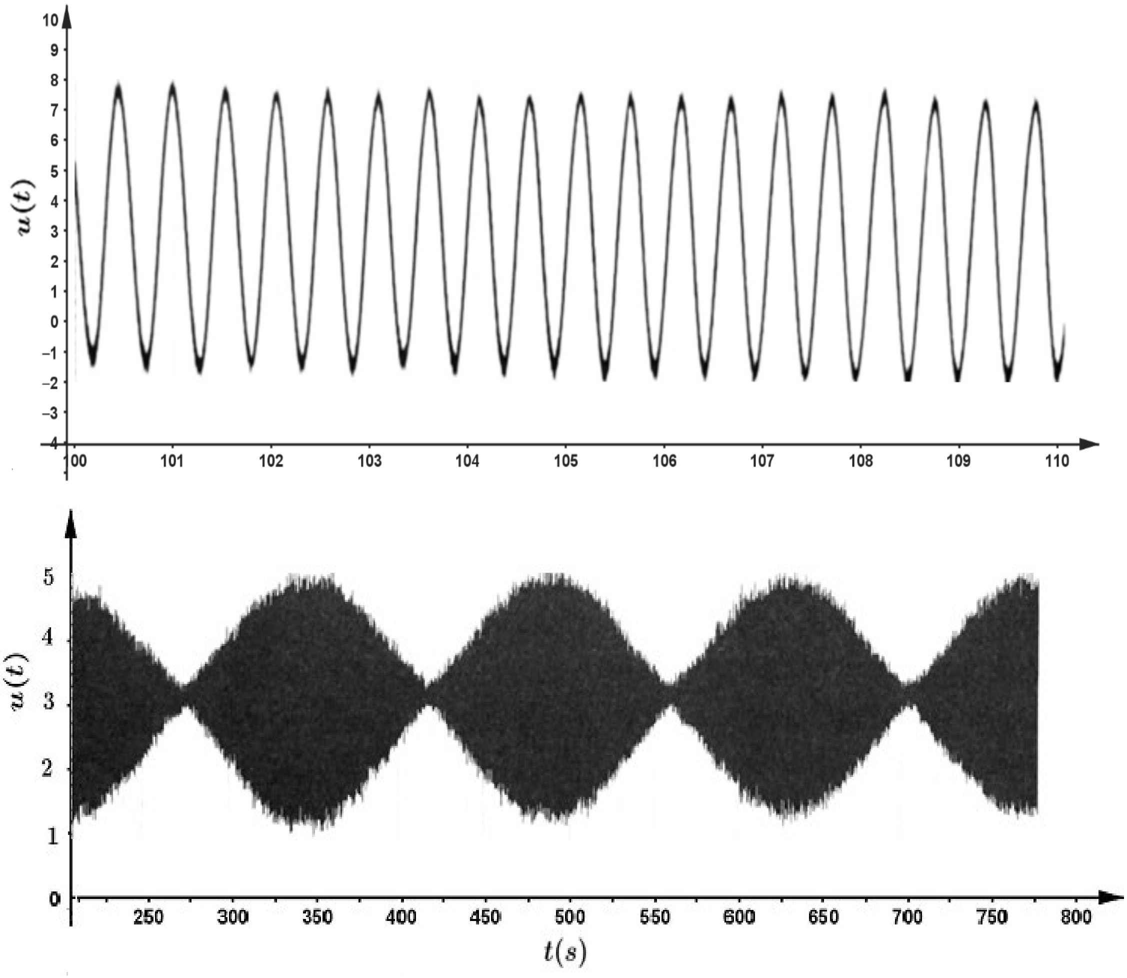

Figure 7

A partir de ces deux courbes expérimentales, déterminer λ_m et $\Delta\lambda$.

....

....

Q37. En utilisant la deuxième courbe, préciser si l'hypothèse sur l'intensité des deux composantes du doublet est vérifiée.

L'exploitation de la courbe aurait-elle été modifiée ? Si cette hypothèse n'avait pas été valable.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Q38. Quel est l'aspect de l'écran lorsque $e \longrightarrow 0$? Comment appelle-t-on cette position.

....

....

....

Configuration en coin d'air

L'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air est éclairé par une lampe à vapeur de sodium que nous assimilerons à une source étendue, monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 589\ nm$.

La lampe est placée à moins d'une distance $d = 40cm$ de l'entrée de Michelson. On place une lentille L_1 entre la lampe et l'entrée du Michelson et une lentille L_2 à la sortie du Michelson. L'écran d'observation est placé derrière la lentille L_2 à une distance $D = 2\ m$ du plan des miroirs. On note f_1' (respectivement f_2') la distance focale image de L_1 (respectivement de L_2).

Q39. Où sont localisées les franges d'interférences ? les nommer.

Préciser le rôle de chaque lentille et préciser les conditions sur les distances focales f_1' et f_2'.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Q40. L'angle du coin d'air est $\alpha = 5.10^{-4}\ rad$. calculer la valeur de l'interfrange i dans le plan des miroirs.

....

....

....

....

....

Q41. On veut que l'interfrange i' sur l'écran soit de $1\ mm$. A quelle distance des miroirs doit-on placer la lentille L_2 ? Quelle est sa distance focale f_2' ?

....

....

....

....

....

....

....

....

Q42. On place devant le miroir mobile une lame de verre d'indice $n = 1{,}5$. Le système de frange est translaté d'une distance égale à 500 interfranges. L'incertitude sur ce nombre est ± 1. Exprimer l'épaisseur de la lame et l'incertitude correspondante. Déterminer les valeurs numériques.

....

....

....

....

……
……
……
……
……

Quatrième partie : L'énergie du point zéro

L'inégalité de Heisenberg spatiale $\Delta x.\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ implique que chaque système quantique possède un point zéro pour son énergie. Avec quelques exemples on cherche à expliciter cette énergie minimale qui correspond à l'énergie de l'état fondamental.

On envisage le mouvement d'une particule quantique de masse m dans un potentiel $V(x,t)$ à une dimension ; ce mouvement est décrit par la fonction d'onde $\Psi(x,t)$.

On rappelle l'expression générale de l'équation de Schrödinger à une dimension.

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t)$$

État stationnaire :

La particule est dans un état stationnaire d'énergie E, ce qui permet d'exprimer la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ sous la forme $\Psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$.

Q43. Qu'appelle-t-on état stationnaire d'un système quantique.

……
……
……
……

Q44. Montrer que la partie temporelle de fonction d'onde s'écrit : $f(t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ à condition de lui imposer d'être de module unité.

Cette condition affecte-elle la condition de normalisation de la fonction $\Psi(x,t)$?

……
……
……
……
……
……
……
……

……
……
……
……
……
……
……

Q45. La forme de la fonction $f(t)$ est-elle cohérente avec la relation de Planck-Einstein ?

……
……
……

Q46. Établir l'équation de Schrödinger indépendante du temps dont $\varphi(x)$ est solution.

……
……
……
……
……
……
……
……

Q47. Montrer que pour une solution $\Psi(x,t)$ normalisable l'énergie E doit être réelle.

……
……
……
……
……
……
……
……

Puits de potentiel infini :

La particule qui se déplace sur un axe Ox est soumise à un potentiel V tel que $V = 0$ pour $0 \leq x \leq a$ et $V = +\infty$ pour $x < 0$ et $x > a$ comme le montre la **figure 8** :

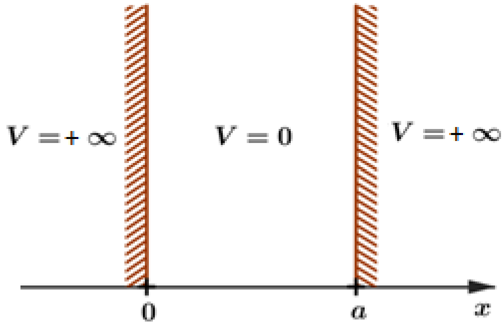

Figure 8

On écrit les fonctions d'onde des états stationnaires sous la forme :

$$\Psi_n(x,t) = \varphi_n(x)e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}$$

On désigne par E_n les énergies correspondantes.

Q48. Quelle sont les conditions aux limites imposées en $x = 0$ et en $x = a$?

....

....

....

Q49. Déterminer les états propres, c'est-à-dire les solutions $\varphi_n(x)$ et les énergies correspondantes E_n en faisant apparaître un nombre quantique n. On normalisera les fonctions $\varphi_n(x)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

………
………
………

Q50. Représenter les graphes de $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ et $\varphi_3(x)$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. Comparer avec les modes propres de vibration d'une corde fixée à ses deux extrémités.

………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………

Q51. Si a diminue, Comment est modifié l'écart entre deux niveaux d'énergie successifs ?

Comment est modifiée l'énergie minimale de la particule ?

………
………
………
………

Q52. Retrouver qualitativement l'énergie minimale à partir de l'inégalité de Heisenberg spatiale.

Commenter la valeur de cette énergie.

On prend $m = 10^{-30}\ kg$ et $a = 10^{-10}\ m$

………

……
……
……
……
……
……
……
……
……

Q53. Quel cas limite retrouve-t-on si a tend vers l'infini ? A quoi est due la quantification de l'énergie ? Dans quel autre domaine de la physique a-t-on déjà rencontré une quantification des pulsations propres ?

……
……
……
……
……
……
……
……

Energie minimale d'un oscillateur harmonique.

Un oscillateur harmonique unidimensionnel a une masse m, une pulsation propre ω_0. Il est soumis à une énergie potentielle $V(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$.

La position moyenne $\langle x \rangle$ et la quantité de mouvement moyenne $\langle p_x \rangle$ de l'oscillateur sont nulles.

Q54. Utiliser la relation d'incertitude de Heisenberg spatiale pour montrer que la valeur moyenne de l'énergie de cet oscillateur est bornée inférieurement :

$$\langle E \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (\Delta x)^2$$

où Δx représente l'indétermination quantique sur la position x de l'oscillateur.

……
……
……
……

……
……
……
……
……
……

Q55. Montrer que la valeur minimale E_{min} que peut prendre la valeur moyenne de l'énergie de l'oscillateur est $\frac{\hbar\omega_0}{2}$ et exprimer l'amplitude de l'indétermination quantique Δx en fonction de m, $\hbar$ et ω_0.

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Q56. Pour l'état fondamental, on donne la fonction d'onde propre $\varphi(x) = Ne^{-\frac{x^2}{a^2}}$:

Déterminer la constante de normalisation N.

Exprimer la constante a en fonction de m, $\hbar$ et ω_0 et retrouver la valeur minimale E_{min} de l'énergie moyenne.

……
……
……
……
……
……
……
……
……

……
……
……
……
……
……

Q57. En raison de l'agitation thermique, il existe aussi des fluctuations Δx_T de la position de l'oscillateur autour de sa valeur moyenne. On donne $\Delta x_T = \sqrt{\frac{K_B T}{m\omega_0^2}}$.

Donner l'expression de la température T_c en dessous de la quelle les fluctuations quantiques sont plus importantes que les fluctuations thermiques. calculer la valeur de T_c pour un oscillateur mécanique usuel de fréquence $f_0 = 10\ Hz$. Commenter la valeur obtenue.

……
……
……
……
……
……
……
……
……

L'atome d'hydrogène

On considère un atome d'hydrogène sphérique de taille caractéristique a. on donne l'expression approchée de l'énergie de l'électron dans l'atome :

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Q58. Que représente le premier terme dans cette expression ? D'où provient-il ? Que représente le deuxième terme ?

……
……
……
……
……
……

……
……

Q59. Déterminer la valeur minimale a_{min} de a qui minimise l'expression de l'énergie. Faire l'application numérique et commenter.

……
……
……
……
……
……

Q60. Calculer numériquement l'énergie minimale E_{min} et commenter la valeur obtenue.

……
……
……
……

Q61. En mécanique classique, pour un électron en orbite circulaire de rayon a autour du noyau, l'énergie mécanique : $E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$ de plus l'électron perd de l'énergie par rayonnement électromagnétique.

Expliquer la phrase suivante : « C'est l'inégalité de Heisenberg qui est à la base de la stabilité des atomes .»

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Force de London.

La force de London est l'une des trois interactions de Van der Waals. Elle décrit l'attraction de deux molécules neutres et apolaires, qui est un phénomène associé aux oscillations quantiques de la densité électronique.

On modélise un édifice moléculaire par une charge positive q immobile en O, représentant les noyaux atomiques et une charge $-q$ de masse m placée en A correspondant au nuage électronique.

Pour une molécule apolaire, les deux points O et A coïncident au repos. Lorsque A se déplace, on le suppose rappelé vers sa position de repos par une force élastique de la forme $\vec{F} = -k\overrightarrow{OA}$. Cette force modélise toutes les interactions électrostatiques au sein de la molécule.

On applique à la molécule un champ électrique extérieur $\vec{E}$ et on rappelle que le moment dipolaire induit associé à la molécule s'écrit $\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$. où α est la polarisabilité de volume de la molécule.

Q62. En considérant l'équilibre de A, déterminer $\vec{p}(t)$ et montrer que $\alpha = \frac{q^2}{k\varepsilon_0}$.

....

....

....

....

....

Q63. Dans cette question et les deux suivantes (**Q64** et **Q65)**, aucun champ électrique ne s'applique à la molécule. On note m la masse du nuage électronique représenté par A. Montrer qu'il se comporte comme un oscillateur harmonique et exprimer la pulsation propre ω_0 correspondante.

....

....

....

....

Q64. Soit x_0 l'amplitude d'oscillation de A. Quelle est, en mécanique classique, son énergie mécanique ?

....

....

....

....

....

On suppose que cet oscillateur se trouve dans l'état de plus basse énergie d'un oscillateur harmonique quantique. En déduire l'expression de x_0 en fonction de $\hbar$, m et ω_0.

....

Q65. Exprimer en fonction de α, ε_0, $\hbar$, q et m l'amplitude p_0 du dipôle électrique oscillant formé par la molécule. Donner sa valeur numérique avec $\alpha = 1.10^{-30}m^3$, Commenter le résultat sachant qu'une molécule polaire telle que HCl possède un moment dipolaire $p = 4.10^{-30}\ C.m$.

Q66. À cause de ces oscillations quantiques, deux molécules voisines présentent des interactions de type dipôle-dipôle même si elles sont en moyenne apolaires. Ces molécules sont situées en O_1 et O_2 avec $\overrightarrow{O_1O_2} = r\vec{u}_x$. À l'instant t, elles portent des moments dipolaires $\vec{p}_1(t)$ et $\vec{p}_2(t)$ dirigés selon $\vec{u}_x$. On note $x_1 = \overline{O_1A_2}$ et $x_2 = \overline{O_2A_2}$ les déplacements des charges négatives dans chacune des deux molécules, très inférieurs r. **(figure 9)**

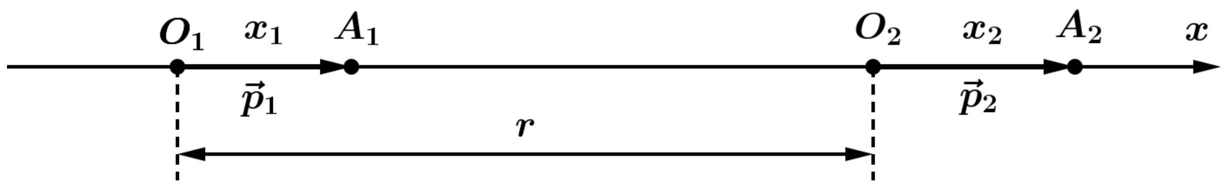

Figure 9

Le champ électrique créé par $\vec{p}_1$ en O_2 est $\vec{E}_1(O_2) = \dfrac{2\vec{p}_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$. Déterminer l'expression de la force $\vec{F}_2$ subie par A_2 de la part de $\vec{p}_1$ et déduire celle de la force $\vec{F}_1$exercée par $\vec{p}_2$ sur A_1.

………
………
………

Q67. On définit une énergie potentielle d'interaction $U(x_1, x_2)$ associée aux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ par :

$$F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \quad ; \quad F_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}$$

Il est important de comprendre ici que l'interaction mutuelle des deux molécules est décrite par une seule et même fonction U dépendant des variables x_1, x_2 et r. Vérifier que l'expression suivante de U est acceptable :

$$U = -\beta x_1 x_2 \text{ avec } \quad \beta = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Une des enjeux de la théorie est de montrer comment obtenir une interaction en $\frac{1}{r^6}$ à partir de U qui est en $\frac{1}{r^3}$.

………
………
………
………
………
………

Q68. Écrire les équations du mouvement dont $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont solutions.

………
………
………
………
………

Q69. Montrer que l'énergie mécanique ;

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + U(x_1, x_2)$$

se conserve et interpréter chacun des termes.

………
………
………
………
………
………

………
………

Q70. Pour découpler les équations de mouvement, on introduit les nouvelles variables

$$S = x_1 + x_2 \quad , \quad D = x_1 - x_2$$

Eliminer x_1 et x_2 dans l'expression de $\mathcal{E}$ de manière à l'exprimer en fonction de S, D, $\dot{S}$, $\dot{D}$ et des différentes constantes du problème.

Faire apparaitre la somme de deux termes : l'un correspondant à un oscillateur harmonique de masse $\frac{m}{4}$ et de raideur k_S associé à la variable S, l'autre correspondant à un oscillateur harmonique de masse $\frac{m}{4}$ et de raideur k_D associé à la variable D. Préciser la pulsation propre de chacun d'eux.

………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………

Q71. La forme de $\mathcal{E}$ mise en évidence ci dessus permet d'affirmer que dans le cadre de la mécanique quantique, l'énergie du système s'obtient en sommant celles des deux oscillateurs harmoniques. Déduire la valeur de $\mathcal{E}$ dans l'état fondamental.

………
………
………
………

Q72. En supposant que $\beta \ll k$, exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de $\hbar$, ω_0, β et k à l'ordre 2 en $\frac{\beta}{k}$. Identifier un terme $\mathcal{E}_{int}$ traduisant l'interaction des deux molécules.

………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………

Q73. Exprimer finalement $\mathcal{E}_{int}$ en fonction de α, $\hbar$, ω_0 et r. Commenter.

………
………
………
………
………
………
………

Fin de l'épreuve