



Concours Physique et Chimie
Épreuve de Mathématiques

Session 2025	Date : 27/05/2025	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

Le sujet comporte deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix. La clarté et la précision de la rédaction seront prises dans l'appréciation de la copie.

L'usage de la calculatrice et tout autre dispositif électronique est interdit.

Donnez vos réponses aux questions dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. Si vous avez besoin de plus d'espace pour une réponse, vous pouvez utiliser l'espace supplémentaire disponible à la fin des feuilles de réponses en précisant le numéro de la question et en indiquant dans l'espace réponse que la réponse se poursuit sur l'espace supplémentaire.

Problème 1

Partie I. Calcul de la somme d'une série

Q.1 ▷ On admet que la somme de la série convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est égale à $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer, après avoir justifier son existence, la somme $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Q.2 ▷ ► Déterminer le domaine de convergence D de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{n+1}$.

► On pose $\forall x \in D$, $L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$. Exprimer L à l'aide de fonctions usuelles.

(On rappelle que $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, $|x| < 1$.)

Q.3 ▷ ► Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$. Justifier l'existence de I .

► Montrer que pour $0 < x < 1$, $\int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = -\frac{1-x}{x} \ln(1-x) - \frac{x+1}{x} \ln(1+x)$.

► Dédurre la valeur de I .

Q.4 ▷ ► En utilisant le **théorème d'intégration terme à terme**, montrer que $I = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$.

► En déduire que $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)} = 2 \ln(2)$.

Q.5 ▷ Posons $S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-\frac{1}{2})^2}$. En vérifiant que $2S_1 - S_2 = \frac{1}{4}S_3$, calculer la somme S_3 .

Partie II. Étude locale de la fonction F

Pour tout $t \in]0, 1[$, on pose $h(t) = \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$. On définit pour tout $x \in]-\infty, 1[$ la fonction F par :

$$F(x) = \int_0^1 t^{-x} h(t) dt.$$

Q.6 ▷ Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $0 < a < 1$. Montrer que si $\alpha < 1$, alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est intégrable sur $]0, a[$.

Q.7 ▷ Établir que la fonction F est bien définie sur $J =]-\infty, 1[$.

Q.8 ▷ Montrer que la fonction F est continue sur J .

Q.9 ▷ ► Prouver que la fonction $t \mapsto t h(t)$ est bornée sur $]0, 1[$.

► En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Q.10 ▷ Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale $\int_0^1 t^{-x} \ln(t) dt$, $x < 1$.

Q.11 ▷ ► En admettant que $\forall t \in]0, 1[, \left| \frac{\ln(1-t)}{t} \right| \geq 1$, vérifier que

$$F(x) = \int_0^1 t^{-x} |\ln t| \frac{|\ln(1-t)|}{t} dt \geq \frac{1}{(1-x)^2}.$$

► En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$.

Q.12 ▷ Montrer que la fonction F est de classe \mathcal{C}^∞ sur J puis donner, pour tout entier $k \geq 1$, l'expression de $F^{(k)}$ sous forme intégrale.

Q.13 ▷ ► Pour tout réel $t > 0$, développer en série entière la fonction $u \mapsto t^{-u}$.

► Calculer le rayon de convergence de cette série.

► Vérifier alors que

$$F(x) = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t) dt, \text{ où } S_n(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t) x^k, \text{ et } f_k(t) = \frac{(-\ln t)^k}{k!} h(t), \text{ } 0 \leq k \leq n.$$

Q.14 ▷ En utilisant le **théorème de la convergence dominée**, montrer qu'au voisinage de 0, on a

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \text{ avec } c_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 (-\ln t)^k h(t) dt.$$

Q.15 ▷ ► Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$?

► En utilisant le fait que $c_k \sim_{+\infty} k$, déterminer la nature de cette série quand $|x| = R$.

Partie III. Développement en série de la fonction F

Q.16 ▷ Développer en série entière la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$. Préciser le rayon de convergence de cette série.

Q.17 ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in J$, calculer $u_n(x) = \int_0^1 t^{n-x} \ln(t) dt$.

Q.18 ▷ Montrer alors soigneusement que $\forall x \in J, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x)^2}$.

Problème 2

Notations :

- \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{R} celui des nombres réels.
- On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le \mathbb{R} espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Pour tout entier n , on désigne par :

- $\mathbb{R}_n[X]$ le sous espace de $\mathbb{R}[X]$ formé par les polynômes de degré inférieur ou égal à n .
- $M_n(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si son coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

Objectif : On se propose, dans ce problème, d'étudier quelques propriétés et applications des polynômes de Lagrange.

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\{a_1, \dots, a_n\}$ désigne une famille de n réels distincts.

Partie I. Étude d'un produit scalaire particulier

Q.19 ▷ Pour tout couple de polynômes $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose

$$\langle P, Q \rangle_n := \sum_{k=1}^n P(a_k)Q(a_k).$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q.20 ▷ Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le j -ème polynôme de Lagrange associé aux réels $\{a_1, \dots, a_n\}$ est donné par :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}.$$

- ▶ Vérifier que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\deg(L_j) = n - 1$.
- ▶ Justifier que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a : $L_j(a_i) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker donné par : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$
- ▶ Prouver que $\mathcal{B} = (L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}_{n-1}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_n)$.
- ▶ Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $P = \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i$. En déduire que $\sum_{i=1}^n L_i = 1$.

Q.21 ▷ Dans cette question, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ et de la norme associée $\| \cdot \|_n$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $\|P\|_n = \sqrt{\langle P, P \rangle_n}$. On pose

$$F_1 = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } P(a_1) = 0\}.$$

- ▶ Montrer que F_1 est un hyperplan de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- ▶ Prouver que $F_1^\perp \oplus D_1 = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, où D_1 est la droite vectorielle engendrée par le polynôme L_1 .
- ▶ On désigne par \mathcal{P}_{F_1} la projection orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur F_1 et par \mathcal{P}_{D_1} la projection orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur D_1 . Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, exprimer $\mathcal{P}_{F_1}(P)$ et $\mathcal{P}_{D_1}(P)$ dans la base \mathcal{B} .
- ▶ On suppose que $a_1 \neq 0$. Montrer que la distance du polynôme X^{n-1} au sous-espace F_1 est donnée par : $d(X^{n-1}, F_1) = |a_1|^{n-1}$.

Q.22 ▷ **Inverse de la matrice de Vandermonde**

Par la suite, V_n désigne la matrice de Vandermonde, associée aux réels $\{a_1, \dots, a_n\}$, donnée par :

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

On note $\mathcal{B}_C = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec $E_i = X^{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour toute famille de polynômes $S = (P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on définit la matrice :

$$A(S) = (P_j(a_i))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} P_1(a_1) & P_2(a_1) & \cdots & P_n(a_1) \\ P_1(a_2) & P_2(a_2) & \cdots & P_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_1(a_n) & P_2(a_n) & \cdots & P_n(a_n) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

- ▶ Déterminer la matrice $A(E_1, \dots, E_n)$ puis la matrice $A(L_1, \dots, L_n)$.

On suppose que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} E_i = \sum_{i=1}^n b_{ij} X^{i-1}$, avec $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $B(S)$ la matrice telle que ses colonnes sont les vecteurs coordonnées des polynômes P_1, \dots, P_n dans la base $\mathcal{B}_C = (E_1, \dots, E_n)$:

$$B(S) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

- ▶ Vérifier que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $V_n \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_j(a_1) \\ P_j(a_2) \\ \vdots \\ P_j(a_n) \end{pmatrix}$.

- ▶ Montrer alors, que le produit des matrices V_n et $B(S)$ est égale à $A(S)$, c.-à-d. $V_n B(S) = A(S)$.

- ▶ En déduire que V_n est inversible et déterminer V_n^{-1} .

Partie II. Polynômes d'interpolation

Étant donné un ensemble de n réels $\{c_1, \dots, c_n\}$, on cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(a_i) = c_i, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Un tel polynôme s'appelle polynôme d'interpolation aux points $(a_i, c_i)_{1 \leq i \leq n}$.

- Q.23** ▷ Montrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ aux points $(a_i, c_i)_{1 \leq i \leq n}$.
(On pourra utiliser la question **Q.22**.)

Déduire que $T = \sum_{i=1}^n c_i L_i$.

- Q.24** ▷ On note, par la suite, $N(X) := \prod_{i=1}^n (X - a_i)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

- ▶ Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) = N(X)Q(X) + \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i(X).$$

- ▶ Déduire que P est un polynôme d'interpolation aux points $(a_i, c_i)_{1 \leq i \leq n}$ si et seulement si

$$P - T = NQ, \quad \text{où } Q \in \mathbb{R}[X].$$

- Q.25** ▷ **Application :**

- ▶ Montrer que $X^n = \prod_{i=1}^n (X - a_i) + \sum_{i=1}^n a_i^n L_i(X)$.

- ▶ Vérifier que $\sum_{i=1}^n a_i^n L_i(0) = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n a_i$.

- ▶ En déduire que $\sum_{i=1}^n (-1)^i i^n C_n^i = (-1)^n n!$. On rappelle que, pour $0 \leq i \leq n$, $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Partie III. Polynômes orthogonaux et quadrature de Gauss

- Q.26** ▷ On considère l'application f de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$f(P)(X) = ((X^2 - 1)P'(X))', \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

- ▶ Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- ▶ Écrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_C = (E_1, \dots, E_{n+1}) = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
- ▶ Déterminer le spectre de f dans \mathbb{R} . Déduire que f est diagonalisable dans $\mathbb{R}_n[X]$.

- Q.27** ▷ Par la suite, on pose : $\lambda_k = k(k+1)$, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- ▶ Montrer qu'il existe une unique base $\mathcal{B}_f = (H_0, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ formée par des polynômes unitaires vérifiant $f(H_k) = \lambda_k H_k, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- ▶ Justifier que $\deg(H_k) = k, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q.28 ▷ Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on note :

$$(P|Q) := \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

- ▶ Vérifier que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|P\| = \sqrt{(P|P)}, \forall P \in \mathbb{R}[X]$.
- ▶ Montrer que f est un endomorphisme symétrique de $(\mathbb{R}_n[X], (\cdot|\cdot))$.
- ▶ Dédire que \mathcal{B}_f est une base orthogonale de $(\mathbb{R}_n[X], (\cdot|\cdot))$.
- ▶ Prouver que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], (P|H_n) = 0$.

On se propose de montrer que le polynôme H_n admet n racines distinctes dans $] - 1, 1[$.

Q.29 ▷ Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- ▶ Montrer que $\int_{-1}^1 H_k(t) dt = 0$.
- ▶ Montrer, par l'absurde, que H_k admet au moins une racine d'ordre impair dans $] - 1, 1[$.

Q.30 ▷ On désigne par $x_1, \dots, x_m, (m \geq 1)$ les racines distinctes d'ordre impair de H_n dans $] - 1, 1[$ et on note $N_m := \prod_{i=1}^m (X - x_i)$.

- ▶ Vérifier que $m \leq n$.
- ▶ Montrer que si $m < n$ alors $(N_m|H_n) = 0$.
- ▶ En déduire que H_n admet n racines simples dans $] - 1, 1[$.

Dans la suite, on note $\{x_1, \dots, x_n\}$ les racines distinctes de H_n et

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - x_k}{x_j - x_k}, j \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

le j -ème polynôme de Lagrange associé à $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Q.31 ▷ Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $\alpha_j = \int_{-1}^1 L_j(t) dt$.

- ▶ Montrer que $X - x_j$ divise $L_j - 1$.
- ▶ Prouver que $\int_{-1}^1 L_j(t) dt = \int_{-1}^1 L_j^2(t) dt$.
- ▶ Dédire que $\alpha_j > 0$.
- ▶ Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{j=1}^n \alpha_j P(x_j)$.

Q.32 ▷ Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

- ▶ Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P = H_n Q + \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j$.
- ▶ En déduire que $\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{j=1}^n \alpha_j P(x_j)$.

★ Fin de l'épreuve ★