



Concours Biologie et Géologie  
Épreuve de Mathématiques

Session 2025	Date : 27/05/2025	Durée : 3 heures
--------------	-------------------	------------------

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

L'usage d'une calculatrice **non programmable** est autorisé. L'usage de tout autre dispositif électronique est interdit.

Donnez vos réponses aux questions dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. Si vous avez besoin de plus d'espace pour une réponse, vous pouvez utiliser l'espace supplémentaire disponible à la fin des feuilles de réponses en précisant le numéro de la question et en indiquant dans l'espace réponse que la réponse se poursuit sur l'espace supplémentaire.

### Exercice I

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  de la base canonique notée  $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$  et du produit scalaire usuel noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On désigne par  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne.

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $A$  dans  $\mathcal{B}_c$  donnée par

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Q.1 ▷ La matrice  $A$  est-elle diagonalisable? Justifier.

Q.2 ▷ Calculer le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ .

Q.3 ▷ En déduire les valeurs propres de  $A$ . Donner les dimensions des sous-espaces propres associés.

Q.4 ▷ Montrer que les vecteurs  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres de  $A$  qu'on déterminera les valeurs propres associées.

Q.5 ▷ Donner la matrice de passage  $P$  de la base canonique  $\mathcal{B}_c$  de  $\mathbb{R}^3$  à la base  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$  et la matrice  $D$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

Q.6 ▷ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n = A$ .

Soit  $F$  le plan d'équation cartésienne :  $x + y + z = 0$ .

Q.7 ▷ Montrer que les vecteurs  $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  forment une base de  $F$ .

Q.8 ▷ Soit  $v_2 = u_1 + \alpha u_2$ . Déterminer  $\alpha$  pour que  $u_1$  soit orthogonale à  $v_2$ .

Q.9 ▷ On considère les vecteurs  $u'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $u'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $(u'_1, u'_2)$  est une base orthonormale de  $F$ . En déduire la dimension de  $F^\perp$ .

Soit  $\varphi$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $M$  dans la base  $\mathcal{B}_c$  donnée par

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

et  $p$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $p = f + \varphi$ .

Q.10 ▷ Déterminer la matrice  $Q$  de  $p$  relativement à la base canonique  $\mathcal{B}_c$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Q.11 ▷ Déterminer  $\text{Im}(p)$  et  $\text{ker}(p)$  et donner une base pour chacun d'eux.

Q.12 ▷ Vérifier que  $p$  est une projection orthogonale sur  $F$ . Déduire les valeurs propres de  $p$ .

Q.13 ▷ Donner la matrice  $N$  de  $p$  dans la base  $\mathcal{B}'' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ , où  $u'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Q.14 ▷ Calculer la distance du vecteur  $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  à  $F$ .

## Exercice II

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois variables aléatoires réelles discrètes indépendantes telles que :

- $X$  est la variable égale au nombre d'épreuves à réaliser afin d'obtenir le premier succès.
- $Y$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .
- $Z$  est la variable aléatoire réelle qui suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Q.15 ▷ Déterminer la loi de  $X$ . Préciser son espérance et sa variance.

Q.16 ▷ Déterminer la loi de la variable aléatoire  $U = X - 1$ .

Q.17 ▷ Vérifier que la loi conjointe du couple  $(Y, U)$  est donnée par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(Y = i \cap U = j) = \frac{pe^{-\lambda} \lambda^i (1-p)^j}{i!}.$$

Q.18 ▷ Montrer que la loi de  $Y + U$  est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y + U = k) = p(1-p)^k e^{-\lambda} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!(1-p)^i}.$$

Q.19 ▷ En déduire la valeur de la somme

$$T_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^k \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!(1-p)^i}.$$

Q.20 ▷ Donner  $E(Y + U)$  et déduire la valeur de  $T_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} kp(1-p)^k \sum_{i=0}^k \frac{(\lambda)^i}{i!(1-p)^i}$ .

Soit  $V$  une variable aléatoire réelle telle que  $V = YZ$ .

Q.21 ▷ Calculer  $P(Z^2 = Z)$ .

Q.22 ▷ Calculer  $P(V = 0)$ .

Q.23 ▷ Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(V = k) = p \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$  puis donner  $E(V)$ .

Soit  $(X, W)$  un couple de variables aléatoires réelles dont la loi conjointe est donnée par

$$(\mathcal{P}) \quad \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i \cap W = j) = \begin{cases} p^2(1-p)^{j-2} & \text{si } 1 \leq i < j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q.24 ▷ Vérifier que  $(\mathcal{P})$  définit bien une loi conjointe.

Q.25 ▷ Montrer que la loi marginale de  $W$  est donnée par

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, P(W = j) = (j-1)p^2(1-p)^{j-2}.$$

Q.26 ▷ Pour  $j$  fixé dans  $\mathbb{N}$ , déterminer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $\{W = j\}$ .

Soit la variable  $R = W - X$ .

Q.27 ▷ Déterminer l'ensemble  $R(\Omega)$  des valeurs prises par la variable  $R$ .

Q.28 ▷ Montrer que  $R$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .

Q.29 ▷ Montrer que les variables  $X$  et  $R$  sont indépendantes. Donner la covariance  $\text{Cov}(X, R)$  du couple  $(X, R)$ .

Q.30 ▷ Déduire  $\text{Cov}(X, W)$ .

### Exercice III

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Soient  $\theta$  un réel strictement positif et  $f_\theta$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ \frac{\theta}{t^{\theta+1}} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Q.31 ▷ Montrer que la fonction  $f_\theta$  est une densité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire  $X$  de densité  $f_\theta$  et on pose  $Y = \ln X$ .

Q.32 ▷ Discuter suivant les valeurs du paramètre réel  $\theta$ , l'existence de l'espérance et de la variance de  $X$ , puis calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

Q.33 ▷ Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .

**Q.34** ▷ Démontrer que  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\theta$ .

On admettra que, si  $U$  et  $V$  sont des variables aléatoires indépendantes admettant respectivement pour densités les fonctions  $f_U$  et  $f_V$ , alors la variable aléatoire  $U + V$  admet pour densité la fonction  $f_{U+V}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x)f_V(t-x) dx.$$

Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que  $Y$ . Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

**Q.35** ▷ Déterminer l'espérance et la variance de  $S_n$ .

**Q.36** ▷ Démontrer par récurrence que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $S_n$  admet pour densité la fonction  $f_n$  donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}; \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{\theta^n}{(n-1)!} e^{-\theta t} t^{n-1} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $W_n = \frac{n}{S_n}$  et  $W'_n = \frac{n-1}{n} W_n$ .

**Q.37** ▷ À l'aide du théorème de transfert, montrer que  $W_n$  admet pour espérance  $\frac{n\theta}{n-1}$  lorsque  $n \geq 2$ .

**Q.38** ▷ Proposer un estimateur sans biais de  $\theta$  à partir de  $W_n$ .

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. En admet que le moment d'ordre 2 de  $W'_n$  est égal à  $\frac{n-1}{n-2} \theta^2$ .

**Q.39** ▷ Calculer la variance de  $W'_n$ .

**Q.40** ▷ Établir, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, on a l'inégalité :

$$P(W'_n - \varepsilon < \theta < W'_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{\theta^2}{\varepsilon^2(n-2)}.$$

**Q.41** ▷ On suppose dans cette question que  $\theta \in ]1, 2[$ . Déterminer un entier naturel  $N$  tel que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $N$ ,  $I_c = \left[ W'_n - \frac{1}{10}, W'_n + \frac{1}{10} \right]$  soit un intervalle de confiance du paramètre  $\theta$  au niveau de confiance 0,95.

★ Fin de l'épreuve ★