REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2025

الجمهوريّة التونسيّة
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنيّة للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2025

Concours Mathématiques et Physique
Épreuve de Mathématiques I

Session 2025	Date : 27/05/2025	Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice et tout autre dispositif électronique est interdit.

Donnez vos réponses aux questions dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. Si vous avez besoin de plus d'espace pour une réponse, vous pouvez utiliser l'espace supplémentaire disponible à la fin des feuilles de réponses en précisant le numéro de la question et en indiquant dans l'espace réponse que la réponse se poursuit sur l'espace supplémentaire.

Exercice :

On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note I_X l'ensemble des réels t tels que l'espérance $E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} P(X = k)$, de la variable aléatoire e^{tX}, soit finie. Pour $t \in I_X$, on pose

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}).$$

Q.1 $\triangleright$ Dans cette question, on considère une variable aléatoire de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in [0, 1]$. Justifier que $I_{\mathcal{B}(p)} = \mathbb{R}$ et calculer $\mathcal{L}_{\mathcal{B}(p)}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q.2 $\triangleright$ Dans cette question, on considère une variable aléatoire de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver que $I_{\mathcal{P}(\lambda)} = \mathbb{R}$ et calculer $\mathcal{L}_{\mathcal{P}(\lambda)}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q.3 $\triangleright$ Montrer que $0 \in I_X$ et que si $t_0 \in I_X$, alors $]-\infty, t_0] \subset I_X$, puis en déduire que I_X est un intervalle non minoré de $\mathbb{R}$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $I_X = \mathbb{R}$.

Q.4 $\triangleright$ Montrer que pour tout $a \geq 0$, $P(X \geq a) \leq \inf_{t>0} e^{-at} \mathcal{L}_X(t)$.

Q.5 $\triangleright$ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable X^n est d'espérance finie.

Q.6 $\triangleright$ Montrer que l'application $\mathcal{L}_X : t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{L}_X(t)$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n.$$

On considère une variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $I_Y = \mathbb{R}$ et pour tout réel t, on a : $\mathcal{L}_Y(t) = \mathcal{L}_X(t)$.

Q.7 $\triangleright$ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X^n) = E(Y^n)$.

Q.8 $\triangleright$ Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les deux séries $\sum\limits_{k\geq 0} e^{ikt}P(X=k)$ et $\sum\limits_{k\geq 0} e^{ikt}P(Y=k)$ convergent et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt}P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikt}P(Y=k).$$

Q.9 $\triangleright$ Prouver que l'application $\psi : t \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{ikt}P(X=k)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q.10 $\triangleright$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-int}\psi(t)\,dt$.

Q.11 $\triangleright$ En déduire que X et Y suivent la même loi.

Q.12 $\triangleright$ Dans cette question, on suppose de plus que les deux variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $I_{X+Y} = \mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t)\mathcal{L}_Y(t).$$

Q.13 $\triangleright$ Dans cette question, on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 > 0$, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_2 > 0$ et que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X+Y$.

Problème :

Le but des parties **I.** et **II.** de ce problème est de montrer que pour une application continue quelconque $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, on a l'équivalence suivante :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge} \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt = 0, \\ \text{Pour tout } a > 0, \text{ l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt \text{ est convergente,} \\ \lim\limits_{a\to 0^+} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt \text{ existe dans } \mathbb{C}. \end{cases}$$

De plus, dans ce cas, $\lim\limits_{a\to 0^+} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.
La partie **III.** du problème est indépendante des autres parties.

Partie I.

Dans toute cette partie, on considère une application continue $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge.}$$

On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Q.14 ▷ Montrer que l'application F admet une limite finie en $+\infty$ et qu'elle est bornée sur $[0, +\infty[$.

Q.15 ▷ En déduire que pour tout $a > 0$, l'application $t \longmapsto e^{-at}F(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Q.16 ▷ Soit $a > 0$. Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt$ est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt = a \int_0^{+\infty} e^{-at} F(t)\, dt.$$

On considère l'application $\mathcal{L} : a \in [0, +\infty[\longmapsto \mathcal{L}(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt$.

Q.17 ▷ Montrer que $\mathcal{L}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a > 0$,

$$\mathcal{L}^{(n)}(a) = a \int_0^{+\infty} (-t)^n e^{-at} F(t)\, dt + n \int_0^{+\infty} (-t)^{n-1} e^{-at} F(t)\, dt.$$

Q.18 ▷ Justifier que pour tout $a > 0$,

$$\mathcal{L}(a) = \int_0^{+\infty} e^{-u} F\left(\frac{u}{a}\right) du,$$

puis en déduire que $\mathcal{L}$ admet une limite finie à droite de 0 et que

$$\lim_{a \to 0^+} \mathcal{L}(a) = I.$$

Q.19 ▷ Prouver que $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \mathcal{L}(a) = 0$.

Pour $x \geq 0$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, dt$.

Q.20 ▷ Justifier que l'application $G : x \mapsto G(x)$ est bien définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$.

Q.21 ▷ En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$,

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x G(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

Q.22 ▷ Soit $x > 0$. Prouver que $\displaystyle\frac{1}{x} \int_0^x t f(t)\, dt = -G(x) + \frac{1}{x} \int_0^x G(t)\, dt$.

Q.23 ▷ En déduire que

$$\int_0^x t f(t)\, dt \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}(x).$$

On considère dans la suite, l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{array}$$

Q.24 ▷ Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Pour $a \geq 0$, on pose $\mathcal{L}_\varphi(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} \varphi(t)\, dt$.

Q.25 ▷ Montrer que $\mathcal{L}_\varphi$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $a>0$, $\mathcal{L}_\varphi'(a) = -\dfrac{1}{1+a^2}$.

Q.26 ▷ En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Partie II.

Dans toute cette partie, on considère une application continue $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,dt = 0, \\ \text{Pour tout } a>0, \text{ l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt \text{ est convergente,} \\ \displaystyle\lim_{a\to 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt \text{ existe dans } \mathbb{C}. \end{cases}$$

On définit l'application

$$\begin{array}{rcl} g : [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt & \text{si } x>0, \\ \dfrac{1}{2}f(0) & \text{si } x=0. \end{cases} \end{array}$$

Q.27 ▷ Montrer que g est continue sur $[0,+\infty[$.

Q.28 ▷ Justifier que $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et en déduire que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}g(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-at}g(t)\,dt$ convergent, pour tout $a>0$.

Q.29 ▷ Soit $a>0$. Montrer que pour tout $x>0$,

$$\int_0^x e^{-at}f(t)\,dt = xg(x)e^{-ax} + \int_0^x e^{-at}g(t)\,dt + a\int_0^x te^{-at}g(t)\,dt,$$

et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}g(t)\,dt + a\int_0^{+\infty} te^{-at}g(t)\,dt$.

Q.30 ▷ Prouver que $\displaystyle\lim_{a\to0^+} a\int_0^{+\infty} te^{-at}g(t)\,dt = 0$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{a\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-at}g(t)\,dt$ existe et vaut

$$\lim_{a\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt.$$

Q.31 ▷ Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x t|g(t)|\,dt = 0$.

Q.32 ▷ Justifier que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $1+t\leq e^t$.

Q.33 ▷ Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x e^{-\frac{t}{x}}g(t)\,dt\right) = 0$.

Q.34 ▷ Justifier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}g(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t}\,dt$, pour tout $x>0$ et montrer que

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}g(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{t}\,dt\right).$$

Q.35 ▷ En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}g(t)\,dt = 0$.

Q.36 ▷ Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \lim_{a\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-at}g(t)\,dt$.

Q.37 ▷ Montrer que pour tout $x>0$, $\int_0^x f(t)\,dt = xg(x) + \int_0^x g(t)\,dt$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{a\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt.$$

On considère l'application

$$\begin{array}{rccl}\phi : & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \phi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{e^t-1} - \sin t & \text{si } t>0, \\ 1 & \text{si } t=0. \end{cases}\end{array}$$

Q.38 ▷ Justifier que ϕ est continue sur $[0,+\infty[$.

Q.39 ▷ Soit $a>0$. Prouver que $\int_0^{+\infty} e^{-at}\phi(t)\,dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\phi(t)\,dt = -\frac{1}{1+a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+a)^2}.$$

(On pourra utiliser un développement en série entière).

Q.40 ▷ Montrer que $\lim_{a\to0^+}\int_0^{+\infty} e^{-at}\phi(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$, mais que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\phi(t)\,dt$ diverge.

Partie III.

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.
On rappelle que l'application $\|\cdot\|_\infty : f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ est une norme sur $\mathcal{C}$.

Q.41 ▷ On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.
Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n \in B = \left\{h\in\mathcal{C}\ ;\ \|h\|_\infty \leq \frac{1}{4}\right\}$.

Q.42 ▷ Justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Q.43 ▷ Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet aucune sous-suite convergente dans $(\mathcal{C},\|\cdot\|_\infty)$ et en déduire que B n'est pas un compact de $(\mathcal{C},\|\cdot\|_\infty)$.

Q.44 ▷ Soient $f\in\mathcal{C}$ et $x>0$. Prouver que la série $\sum_{n\geq0} e^{-nx}f(e^{-nx})$ converge.

On note $L(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}f(e^{-nx})$.

Q.45 ▷ Montrer que l'ensemble $E = \left\{f\in\mathcal{C},\ \lim_{x\to0^+} xL(f)(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\right\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C},\|\cdot\|_\infty)$.

Pour $f \in E$, on pose

$$T(f) = \lim_{x \to 0^+} xL(f)(x).$$

Q.46 ▷ Prouver que l'application $T : f \in E \longmapsto T(f)$ est une forme linéaire continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Q.47 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $m_k : t \in [0,1] \longmapsto t^k$ appartient à E et que

$$T(m_k) = \int_0^1 m_k(t)\, dt.$$

Q.48 ▷ En déduire que $E = \mathcal{C}$ et que pour tout $f \in \mathcal{C}$,

$$\lim_{x \to 0^+} x \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} f(e^{-nx}) = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

⋆ **Fin de l'épreuve** ⋆