

Q.23 ▷ On suppose que  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $S \in S_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = S^2$ .

III.B)

Q.24 ▷ Montrer que  $\Delta_{A,B}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\Delta_{A,B}^{(k)}(x) = \text{Tr}({}^t B A^k e^{xA} B).$$

Q.25 ▷ Montrer que  $\Delta_{A,B}$  est constante sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $AB = 0$ .

Q.26 ▷ Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta_{A,B}''(x) \geq 0$ . En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\Delta_{A,B}(x) \geq \|B\|^2 + x \text{Tr}({}^t B A B).$$

Qu'est ce qu'on obtient si  $\text{Tr}({}^t B A B) = 0$ ?

Q.27 ▷ On pose  $H = \{M \in S_n(\mathbb{R}), \text{Tr}({}^t B M B) = 0\}$ . Montrer que  $H$  est un hyperplan de  $S_n(\mathbb{R})$  et justifier que  $H \oplus \text{vect}(I_n) = S_n(\mathbb{R})$ .

Q.28 ▷ Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  vérifiant, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta_{A,B}(x) \geq e^{\alpha x} \|B\|^2 > 0$ .

Q.29 ▷ En remarquant que  $\Delta_{A,B}(x) = \langle B, e^{xA} B \rangle$ , montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{(\Delta_{A,B}(x))^2}{\Delta_{A,B}(2x)} \leq \|B\|^2$ .

III.C) Soit  $S = \{M \in M_n(\mathbb{R}), \|M\| = 1\}$ , la sphère unité de  $M_n(\mathbb{R})$  pour la norme  $\|\cdot\|$ .

Q.30 ▷ Montrer que  $\varphi_A$  est strictement positive sur  $S$  et que  $\varphi_A$  admet un maximum et un minimum sur  $S$ .

Q.31 ▷ Soit  $(U, V) \in (\mathbb{R}^n)^2$ . Montrer que  $\text{Tr}(U {}^t V) = \langle U|V \rangle$ , où  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ .

Q.32 ▷ Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ . On considère un vecteur  $Y \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$  et soit  $N = Y {}^t Y$ . Montrer que  $N \neq 0$  et que  $\varphi_A(N) = e^\lambda \|N\|^2$ . Déduire que  $e^\lambda \in \varphi_A(S)$ .

III.D)

Dans la suite, notons par  $\lambda_1 > \dots > \lambda_r$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $A$ . Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

Pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on note  $d_i = \dim E_{\lambda_i}(A)$  et  $\mathcal{B}_i = (V_{i,1}, \dots, V_{i,d_i})$  une base orthonormée de  $E_{\lambda_i}(A)$ .

On note  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r) = (V_{1,1}, \dots, V_{1,d_1}, V_{2,1}, \dots, V_{2,d_2}, \dots, V_{r,1}, \dots, V_{r,d_r})$ .

Q.33 ▷ Justifier que  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .

Pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on définit la matrice  $A_i$  par

$$A_i = \sum_{m=1}^{d_i} V_{i,m} {}^t V_{i,m}.$$

Q.34 ▷ Soit  $1 \leq i \leq r$ . Vérifier que pour tout  $1 \leq k \leq d_i$ ,  $A_i V_{i,k} = V_{i,k}$  et que pour tout  $1 \leq j \leq r$ ,  $j \neq i$  et  $1 \leq k \leq d_j$ , on a  $A_i V_{j,k} = 0$ . En déduire que l'endomorphisme canoniquement associé à  $A_i$  est la projection orthogonale sur  $E_{\lambda_i}(A)$ .

Q.35 ▷ Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$e^{xA} = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i x} A_i.$$



Concours Mathématiques et Physique

Épreuve de Mathématiques II

Session 2024	Date : 04/06/2024	Durée : 3 heures
--------------	-------------------	------------------

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Donnez vos réponses aux questions dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. Si vous avez besoin de plus d'espace pour une réponse, vous pouvez utiliser l'espace supplémentaire disponible à la fin des feuilles de réponses en précisant le numéro de la question et en indiquant dans l'espace réponse que la réponse se poursuit sur l'espace supplémentaire.

Notations

- Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul.  $M_n(\mathbb{R})$  désigne l'espace des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels,  $I_n$  est la matrice unité d'ordre  $n$ . Pour  $M \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\chi_M$  est le polynôme caractéristique de  $M$ . On note aussi  $\text{Sp}(M)$  l'ensemble des valeurs propres réelles de  $M$  et  $E_\lambda(M)$  le sous-espace propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Pour une matrice  $A$ ,  ${}^t A$  est la transposée de  $A$ .
- On note  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la matrice diagonale d'ordre  $n$  à coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .
- On désigne par  $S_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques (vérifiant  ${}^t M = M$ ) de  $M_n(\mathbb{R})$  et par  $S_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $S_n(\mathbb{R})$  à valeurs propres positives.
- On note par  $O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales (vérifiant  ${}^t M M = I_n$ ) de  $M_n(\mathbb{R})$ .
- L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est identifié à l'espace  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  des vecteurs colonnes à  $n$  composantes réelles. Il est muni de son produit scalaire usuel défini par  $\langle X|Y \rangle = {}^t X Y$  et de la norme euclidienne associée notée  $\|\cdot\|_2$ .
- Lorsque  $E$  est un espace vectoriel,  $\text{id}_E$  désigne l'endomorphisme identité de  $E$  et  $\mathcal{L}(E)$  désigne l'espace des endomorphismes de  $E$ . Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on note  $\chi_u$  le polynôme caractéristique de  $u$ ,  $\text{Sp}(u)$  l'ensemble des valeurs propres réelles de  $u$  et  $E_\lambda(u)$  le sous-espace propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . De plus, si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , on note  $M_{\mathcal{B}}(u)$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , on rappelle que l'endomorphisme  $u : X \in \mathbb{R}^n \mapsto AX \in \mathbb{R}^n$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ . Il est clair que  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(A)$  et que pour toute valeur propre réelle  $\lambda$  de  $A$ ,  $E_\lambda(u)$  coïncide avec  $E_\lambda(A)$ .

### Partie I.

Dans cette partie,  $(E, (\cdot|\cdot))$  désigne un espace euclidien de dimension  $n$  muni du produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$  et  $\|\cdot\|_E$  désigne la norme euclidienne associée. Soit  $u$  un élément de  $\mathcal{L}(E)$ .

Q.1 ▷ Si  $A$  et  $B$  sont deux éléments de  $M_n(\mathbb{R})$ , on pose  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t A B)$  où  $\text{Tr}$  désigne la trace. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $M_n(\mathbb{R})$ . On note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.

Q.2 ▷ Soient  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $P \in O_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\|PAP^{-1}\| = \|A\|$ .

Q.3 ▷ Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases orthonormées de  $E$  et notons  $A = M_{\mathcal{B}}(u)$  et  $A' = M_{\mathcal{B}'}(u)$ . Montrer que  $\|A\| = \|A'\|$ .

On définit alors la trace étoilée de  $u$  notée  $T^*(u)$  par  $T^*(u) = \|A\|^2$  où  $A$  est une matrice de l'endomorphisme  $u$  dans une base orthonormée de  $E$ .

Q.4 ▷ Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer que pour toute matrice  $N$  de  $M_n(\mathbb{R})$  nilpotente, on a  $\|N + \lambda I_n\|^2 \geq n\lambda^2$ .

En déduire que si l'endomorphisme  $u - \lambda \text{id}_E$  est nilpotent, alors  $T^*(u) \geq n\lambda^2$ .

Q.5 ▷ Montrer que si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$ , alors  $T^*(u) = \sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|_E^2$ .

Q.6 ▷ Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $\|u(x)\|_E^2 \leq T^*(u)\|x\|_E^2$ . En déduire que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , on a  $\lambda^2 \leq T^*(u)$ .

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on définit la trace étoilée de  $u$  restreinte à  $F$ , notée  $T^*(u, F)$ , par  $T^*(u, F) = T^*(u \circ p_F)$  où  $p_F$  est la projection orthogonale sur  $F$ .

Supposons que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p \geq 1$  et que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $F$ .

Q.7 ▷ Montrer que  $T^*(u, F) = \sum_{i=1}^p \|u(e_i)\|_E^2 \leq T^*(u)$ .

Q.8 ▷ En déduire que  $T^*(u, F) = 0$  si et seulement si  $F \subset \text{Ker}(u)$ .

### Partie II.

Soit  $N$  une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $N$ .

Q.9 ▷ Justifier que  $T^*(f) = \|N\|^2$  et que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(N)$ , on a  $\lambda^2 \leq \|N\|^2$ .

Q.10 ▷ En déduire que si  $\|N\| < 1$ , alors  $I_n - N$  est inversible.

Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $N$  de multiplicité  $m$ . On se propose de montrer que  $\|N\|^2 \geq m\lambda^2$ .

Q.11 ▷ Montrer qu'il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $Q(\lambda) \neq 0$  et

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}((f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n})^m) \oplus \text{Ker}(Q(f)).$$

Justifier que  $\text{Ker}((f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n})^m)$  et  $\text{Ker}(Q(f))$  sont stables par  $f$ .

Dans la suite, on pose  $F_1 = \text{Ker}((f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n})^m)$  et  $F_2 = \text{Ker}(Q(f))$ . On note par  $f_1$  et  $f_2$  les endomorphismes induits par  $f$  respectivement sur  $F_1$  et  $F_2$ .

Q.12 ▷ Montrer que  $\chi_f = \chi_{f_1} \chi_{f_2}$  si  $F_2 \neq \{0\}$  et que  $\chi_f = \chi_{f_1}$  si  $F_2 = \{0\}$ .

Q.13 ▷ Montrer que  $f_1 - \lambda \text{id}_{F_1}$  est nilpotent et déduire que  $\chi_{f_1} = (X - \lambda)^d$  où  $d = \dim F_1$ .

Q.14 ▷ Justifier que  $Q(f_2) = 0$  et déduire que  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $f_2$ .

Q.15 ▷ En déduire que  $d = m$  et que  $T^*(f_1) \geq m\lambda^2$ . (On utilisera le résultat établi dans la partie I.)

Q.16 ▷ Montrer que  $T^*(f, F_1) = T^*(f_1)$  et déduire que  $\|N\|^2 \geq m\lambda^2$ .

Dans la suite, on suppose que  $N$  possède au moins une valeur propre réelle non nulle. Notons par  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres réelles non nulles deux à deux distinctes de  $N$  ayant respectivement pour multiplicité  $m_1, \dots, m_r$ .

Q.17 ▷ Montrer qu'il existe un unique  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\|I_n - x_0 N\|^2 = \min\{\|I_n - xN\|^2, x \in \mathbb{R}\}$ . On note  $h_N = \|I_n - x_0 N\|^2$ .

Q.18 ▷ Montrer que  $h_N = n - \frac{(\text{Tr}(N))^2}{\|N\|^2}$  et en déduire que  $h_N \geq n - \frac{(\text{Tr}(N))^2}{\max_{1 \leq i \leq r} m_i \lambda_i^2}$ .

Q.19 ▷ Dans cette question, on suppose que  $0 \in \text{Sp}(N)$ . En utilisant la question Q.10, montrer que

$$h_N \geq \max\left\{1, n - \frac{(\text{Tr}(N))^2}{\max_{1 \leq i \leq r} m_i \lambda_i^2}\right\}.$$

### Partie III.

On rappelle que si  $A$  est une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$ , la matrice exponentielle de  $A$  est  $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $Ae^{xA} = e^{xA}A$ . On rappelle aussi que si  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , alors  $e^A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ . Étant donné deux matrices  $A$  et  $B$  de  $M_n(\mathbb{R})$ , on définit pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\Delta_{A,B}(x) = \text{Tr}({}^t B e^{xA} B),$$

et on définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi_A : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ N &\longmapsto \text{Tr}({}^t N e^A N). \end{aligned}$$

Dans toute cette partie, on considère une matrice symétrique  $A \in S_n(\mathbb{R})$  et une matrice  $B$  non nulle de  $M_n(\mathbb{R})$ .

#### III.A)

Q.20 ▷ Considérons  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $Y \in E_\lambda(A)$ . Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $e^{xA}Y = e^{\lambda x}Y$ .

Q.21 ▷ Montrer qu'il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et une matrice  $P \in O_n(\mathbb{R})$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ , on a

$$A^k e^{xA} = P \text{diag}(\lambda_1^k e^{\lambda_1 x}, \lambda_2^k e^{\lambda_2 x}, \dots, \lambda_n^k e^{\lambda_n x}) P^{-1}.$$

Q.22 ▷ Justifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $A^{2k} e^{xA} \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

Pour toute matrice  $N$  de  $M_n(\mathbb{R})$ , on désigne par  $f_N$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  ${}^tN$  c'est à dire

$$f_N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ X \longmapsto {}^tNX$$

et on définit pour tout  $1 \leq i \leq r$ ,  $q_N(\lambda_i) = T^*(f_N, E_{\lambda_i}(A))$ , la trace étoilée de  $f_N$  restreinte à  $E_{\lambda_i}(A)$ .

Considérons une matrice  $N$  de  $M_n(\mathbb{R})$ .

Q.36 ▷ Montrer que, pour tout  $1 \leq i \leq r$ , on a  $\text{Tr}({}^tNA_iN) = q_N(\lambda_i)$ . Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\text{Tr}({}^tN e^{xA} N) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i x} q_N(\lambda_i).$$

En déduire que  $\sum_{i=1}^r q_N(\lambda_i) = \|N\|^2$ .

Q.37 ▷ Soit  $1 \leq i \leq r$ . On suppose, dans cette question, que  $q_N(\lambda_j) = 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$ . Montrer que  $f_N \circ u = \lambda_i f_N$  puis que  $AN = \lambda_i N$ .

### III.E)

Q.38 ▷ Montrer que  $\min_{M \in S} \varphi_A(M) = e^{\lambda_r}$  et  $\max_{M \in S} \varphi_A(M) = e^{\lambda_1}$ .

On pose  $\psi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $N \longmapsto \text{Tr}({}^tNe^AN) - e^{\lambda_1} \|N\|^2$ .

Q.39 ▷ Montrer que  $\psi$  est différentiable sur  $M_n(\mathbb{R})$  et que pour tout  $N \in M_n(\mathbb{R})$ , la différentielle de  $\psi$  en  $N$  est donnée par

$$D\psi(N)H = 2 \text{Tr}({}^tHe^AN) - 2e^{\lambda_1} \text{Tr}({}^tHN), \quad \forall H \in M_n(\mathbb{R}).$$

Soit  $N_0 \in S$  tel que  $\varphi_A(N_0) = e^{\lambda_1}$ .

Q.40 ▷ Montrer que  $\psi$  admet un maximum au point  $N_0$ . En déduire que  $e^AN_0 = e^{\lambda_1} N_0$ .

Q.41 ▷ Établir la relation  $\sum_{i=2}^r (e^{\lambda_i} - e^{\lambda_1}) q_{N_0}(\lambda_i) = 0$  et déduire qu'on a aussi  $AN_0 = \lambda_1 N_0$ .

### III.F)

On revient à l'étude de la fonction  $\Delta_{A,B}(x) = \text{Tr}({}^tB e^{xA} B)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Q.42 ▷ On pose  $\text{Sp}^*(A) = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq r, q_B(\lambda_i) \neq 0\}$ . Justifier que  $\text{Sp}^*(A) \neq \emptyset$ .

Q.43 ▷ On suppose que  $\alpha_1 > \dots > \alpha_m$  sont les éléments distincts de  $\text{Sp}^*(A)$ .

Montrer que  $\Delta_{A,B}(x) \underset{+\infty}{\sim} q_B(\alpha_1) e^{\alpha_1 x}$  et que  $\Delta_{A,B}(x) \underset{-\infty}{\sim} q_B(\alpha_m) e^{\alpha_m x}$ .

En déduire que la fonction  $x \longmapsto \frac{(\Delta_{A,B}(x))^2}{\Delta_{A,B}(2x)}$  admet des limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  qu'on précisera.

★ Fin de l'épreuve ★