Pour tout entier relatif k, on pose $c_k(u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(t)e^{-ikt}\,dt$.

Q.38 ▷ Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(u)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x-t)D_n(t)\,dt.$

Q.39 ▷ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(u)e^{ikx} - u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_x(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt,$$

$$\text{où } v_x(t) = \begin{cases} \dfrac{u(x-t)-u(x)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\}, \\ -2u'(x) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Q.40 ▷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, v_x est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$.

Q.41 ▷ Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} v_x(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) = 0.$

Q.42 ▷ En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k(u)e^{ikx}.$

Q.43 ▷ Prouver que $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k(u) = \dfrac{1}{2\pi}F(k).$

Q.44 ▷ Établir la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n} e^{-\frac{(x+2k\pi)^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n} e^{-\frac{\sigma^2k^2}{2}+ikx}.$$

Q.45 ▷ En déduire que

$$\forall \sigma' > 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} g_{\sigma'}(n) = \frac{1-\sigma'\sqrt{2\pi}}{2\sigma'\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\sigma'^2\pi^2n^2}.$$

Partie V.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \alpha < \beta$ et $s \in \mathbb{R}$.

Q.46 ▷ Prouver que $\forall y \in [\alpha,\beta],\ 0 < (\beta-\alpha)e^{sy} \leq (\beta-y)e^{s\alpha} + (y-\alpha)e^{s\beta}$.

Q.47 ▷ En déduire que si $0 \in [\alpha,\beta]$, alors $\beta e^{s\alpha} - \alpha e^{s\beta} > 0$.

Q.48 ▷ Montrer, à l'aide d'une étude de fonction, que si $0 \in [\alpha,\beta]$, alors

$$\ln\left(\beta e^{s\alpha} - \alpha e^{s\beta}\right) \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}s^2 + \ln(\beta-\alpha).$$

Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et prenant ses valeurs dans $[\alpha,\beta]$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \alpha < \beta$.

Q.49 ▷ Justifier que Y admet une espérance finie et que $\alpha \leq E(Y) \leq \beta$. Puis en déduire que

$$|Y - E(Y)| \leq \beta - \alpha.$$

Q.50 ▷ Montrer que Y admet une variance finie et que

$$V(Y) = \min_{x\in\mathbb{R}} E\left((Y-x)^2\right) \leq E\left(\left(Y - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right) \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}.$$

REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2024

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2024

Concours Mathématiques et Physique
Épreuve de Mathématiques I

Session 2024	Date : 29/05/2024	Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Donnez vos réponses aux questions dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. Si vous avez besoin de plus d'espace pour une réponse, vous pouvez utiliser l'espace supplémentaire disponible à la fin des feuilles de réponses en précisant le numéro de la question et en indiquant dans l'espace réponse que la réponse se poursuit sur l'espace supplémentaire.

La partie **V.** est indépendante des autres parties.

Partie I.

Q.1 ▷ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2\tan^2\theta}}{\cos^2\theta}\,d\theta.$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}\,d\theta, \quad x \in \mathbb{R}.$

Q.2 ▷ Prouver que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.$

Q.3 ▷ Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Q.4 ▷ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$

Q.5 ▷ Expliciter h.

Q.6 ▷ Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente et qu'elle vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie II.

Soit $\sigma > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{et} \quad G_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{x} g_\sigma(t)\,dt.$$

Q.7 ▷ Vérifier que la fonction g_σ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q.8 ▷ En déduire que la fonction G_σ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q.9 ▷ Justifier que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_\sigma(t)\,dt = 1.$

Q.10 ▷ Prouver que pour tout $x > 0$ et tout $t \geq x$,

$$g_\sigma(t) \leq \frac{t}{x} g_\sigma(t) \quad \text{et que} \quad \int_x^{+\infty} g_\sigma(t)\,dt \leq \frac{\sigma^2}{x} g_\sigma(x).$$

Q.11 ▷ Montrer que $\forall x \geq 0,\quad \dfrac{\sigma^2 x}{x^2+\sigma^2} g_\sigma(x) \leq \displaystyle\int_x^{+\infty} g_\sigma(t)\,dt.$

Q.12 ▷ En déduire que $1 - G_\sigma(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sigma^2}{x} g_\sigma(x)$.

Q.13 ▷ Pour $s \in \mathbb{R}$, prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} g_\sigma(t)\,dt$.

On note $\mathcal{L}(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} g_\sigma(t)\,dt$.

Q.14 ▷ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - G_\sigma(x) = \sigma\sqrt{2\pi}\, g_\sigma(x) \mathcal{L}\left(\dfrac{x}{\sigma^2}\right)$.

Q.15 ▷ En déduire que $\mathcal{L}(s) \underset{s \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{s}$.

Partie III.

On note par $\mathcal{C}_b$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et par $\mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles.

Soient $\sigma > 0$ et $f \in \mathcal{C}_b$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_{\sigma,f}) : \qquad y'(t) - \frac{t}{\sigma^2} y(t) = -f(t), \quad t \in [0, +\infty[.$$

On note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \geq 0} |f(x)|$.

Q.16 ▷ Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$. Montrer que φ est solution de $(E_{\sigma,f})$ sur $[0, +\infty[$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{g_\sigma(x)} \left(c - \int_0^x f(t) g_\sigma(t)\,dt \right).$$

Q.17 ▷ Prouver que s'il existe une solution de $(E_{\sigma,f})$ qui soit bornée sur $[0, +\infty[$, alors elle est unique.

Q.18 ▷ Montrer que la fonction $\psi : x \longmapsto \dfrac{1}{g_\sigma(x)} \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t) g_\sigma(t)\,dt$ est l'unique solution de $(E_{\sigma,f})$ bornée sur $[0, +\infty[$.

On définit ainsi un endomorphisme T_σ de $\mathcal{C}_b$ qui à toute fonction f de $\mathcal{C}_b$ associe $T_\sigma(f) = \psi$ où ψ est la fonction donnée précédemment.

Q.19 ▷ L'endomorphisme T_σ est-il injectif ?

Q.20 ▷ Montrer que $\forall f \in \mathcal{C}_b,\ \forall x \geq 0,\quad T_\sigma(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t(t+2x)}{2\sigma^2}} f(t+x)\,dt.$

Q.21 ▷ Soit $f \in \mathcal{C}_b$. Justifier que si f est décroissante et positive sur $[0, +\infty[$, alors $T_\sigma(f)$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

Q.22 ▷ Exprimer $T_\sigma(\mathbf{1})$ en fonction de $\mathcal{L}$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante qui vaut 1 sur $[0, +\infty[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n l'application définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = e^{-nx}, \quad x \geq 0.$$

Q.23 ▷ Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad T_\sigma(f_n)(x) = f_n(x) T_\sigma(\mathbf{1})(x + n\sigma^2).$$

Q.24 ▷ Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|T_\sigma(f_n)\|_\infty}$.

Q.25 ▷ Justifier que l'application $N : \varphi \longmapsto \|T_\sigma(\varphi)\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}_b$.

Q.26 ▷ Les deux normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes sur $\mathcal{C}_b$?

Q.27 ▷ Soit $f \in \mathcal{C}_b$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la relation suivante :

$$\forall x \geq 0, \quad T_\sigma^{n+1}(f)(x) = \frac{1}{g_\sigma(x)} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t) g_\sigma(t)\,dt,$$

où $T_\sigma^{n+1} = \underbrace{T_\sigma \circ T_\sigma \circ \cdots \circ T_\sigma}_{(n+1)\text{ fois}}$.

Q.28 ▷ Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall f \in \mathcal{C}_b,\quad \|T_\sigma^{n+1}(f)\|_\infty \leq \dfrac{\sigma\sqrt{2\pi}}{n!} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n g_\sigma(t)\,dt \right) \|f\|_\infty.$

Q.29 ▷ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $T_\sigma^{n+1} : (\mathcal{C}_b, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}_b, \|\cdot\|_\infty)$ est continue.

Partie IV.

Soit $\sigma > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} g_\sigma(t) e^{-ixt}\,dt,$$

$$u_0(x) = g_\sigma(x) \quad \text{et} \quad u_n(x) = g_\sigma(x + 2n\pi) + g_\sigma(x - 2n\pi), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On pose aussi pour $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$, lorsque cette limite existe.

Q.30 ▷ Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad F^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^n g_\sigma(t) e^{-ixt}\,dt.$$

Q.31 ▷ Prouver que la fonction F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' + \sigma^2 xy = 0.$$

Q.32 ▷ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}}$.

Q.33 ▷ Prouver que la fonction u est bien définie et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

Q.34 ▷ Montrer que les séries de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n \geq 0} u_n'$ et $\sum\limits_{n \geq 0} u_n''$ convergent normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Q.35 ▷ En déduire que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $D_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt}$.

Q.36 ▷ Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1.$

Q.37 ▷ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\quad D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2n+1 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$

Q.51 ▷ Prouver que si $E(Y) = 0$, alors $\forall s \in \mathbb{R},\ 0 \leq (\beta - \alpha)E\left(e^{sY}\right) \leq \beta e^{s\alpha} - \alpha e^{s\beta}$.

Q.52 ▷ En déduire que si $0 \in [\alpha, \beta]$ et $E(Y) = 0$, alors $\forall s \in \mathbb{R},\ E\left(e^{sY}\right) \leq e^{\frac{s^2}{2\sigma_0^2}}$, avec $\sigma_0 = \dfrac{2}{\beta - \alpha}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes prenant leurs valeurs dans $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$, et définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad M_n = \frac{S_n}{n} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i X_i,$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sont des réels non tous nuls.

Q.53 ▷ Justifier que

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \forall s \in \mathbb{R}, \quad E\left(e^{s(X_i - E(X_i))}\right) \leq e^{\frac{s^2}{2\sigma_1^2}},$$

avec $\sigma_1 = \dfrac{2}{b - a}$.

Q.54 ▷ Prouver que $\forall s \in \mathbb{R},\ E\left(e^{s(T_n - E(T_n))}\right) \leq e^{\frac{s^2}{2\sigma_2^2}}$, avec $\sigma_2 = \sigma_1 \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Q.55 ▷ Montrer que $\forall s > 0,\ \forall t > 0,\ P\left(T_n - E(T_n) \geq t\right) \leq e^{-st + \frac{s^2}{2\sigma_2^2}}$.

Q.56 ▷ En déduire que $\forall t > 0, \quad P\left(T_n - E(T_n) \geq t\right) \leq e^{-\frac{t^2}{2\sigma_3^2}}$, avec $\sigma_3 = \dfrac{1}{\sigma_2}$.

Q.57 ▷ Montrer que si de plus les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent la même loi, alors on a l'inégalité suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(|M_n - E(X_1)| \geq \varepsilon\right) \leq 2\, e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2}},$$

avec $\sigma = \dfrac{1}{\sigma_1} = \dfrac{b - a}{2}$.

On suppose dans toute la suite que les variables mutuellement indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Q.58 ▷ Justifier que $\forall \varepsilon > 0,\ P\left(|M_n - p| \geq \varepsilon\right) \leq 2\, e^{-2n\varepsilon^2}$.

Q.59 ▷ En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(|M_n - p| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1 - p)}{n\varepsilon^2}.$$

Q.60 ▷ Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$ vérifiant $n\varepsilon^2 > c$, on a :

$$2\, e^{-2n\varepsilon^2} < \frac{p(1 - p)}{n\varepsilon^2}.$$

Conclure.

★ **Fin de l'épreuve** ★