

Partie C : Un cas particulier important

Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|$.

Q.11 ▷ Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Q.12 ▷ ▶ Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

▶ En déduire que $\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

▶ Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ tel que $\|A\| < 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0_p$.

Q.13 ▷ Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure telle que, pour tout $1 \leq i \leq p$, on a $|a_{i,i}| < 1$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $P_\varepsilon = \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1})$.

▶ Montrer que

$$P_\varepsilon^{-1} A P_\varepsilon = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \varepsilon a_{1,2} & \varepsilon^2 a_{1,3} & \dots & \varepsilon^{p-1} a_{1,p} \\ 0 & a_{2,2} & \varepsilon a_{2,3} & \dots & \varepsilon^{p-2} a_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & a_{p-1,p-1} & \varepsilon a_{p-1,p} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{p,p} \end{pmatrix},$$

puis déduire que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P_\varepsilon^{-1} A P_\varepsilon = \text{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{p,p})$.

▶ Calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|P_\varepsilon^{-1} A P_\varepsilon\|$ et déduire qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\|P_{\varepsilon_0}^{-1} A P_{\varepsilon_0}\| < 1$.

▶ Déduire alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0_p$.

Q.14 ▷ Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que, pour toute valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(A)$, on a $|\lambda| < 1$.

▶ Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in \text{GL}_p(\mathbb{C})$ tels que $A = P T P^{-1}$.

▶ En utilisant la question Q.13, déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n = 0_p$.

▶ Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0_p$.

Partie D : Condition suffisante

Q.15 ▷ Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ vérifiant les deux conditions suivantes :

• $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, on a $\lambda = 1$ ou $|\lambda| < 1$.

• $\text{Ker}(A - I_p) \cap \text{Im}(A - I_p) = \{0\}$.

▶ Vérifier que si $\text{Ker}(A - I_p) = \{0\}$ ou $\text{Im}(A - I_p) = \{0\}$, alors la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On suppose dans la suite que $1 \in \text{Spec}(A)$ et que $\text{Im}(A - I_p) \neq \{0\}$.

▶ Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec I_d une matrice identité

d'ordre d que l'on précisera et B une matrice dont toutes ses valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

▶ Déduire que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2024



الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
تورة 2024

Concours Physique et Chimie & Technologie Épreuve de Mathématiques

Session 2024	Date : 29/05/2024	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

Le sujet comporte deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix. La clarté et la précision de la rédaction seront prises dans l'appréciation de la copie.

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé. Tout autre dispositif électronique est interdit.

Donnez vos réponses aux questions dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. Si vous avez besoin de plus d'espace pour une réponse, vous pouvez utiliser l'espace supplémentaire disponible à la fin des feuilles de réponses en précisant le numéro de la question et en indiquant dans l'espace réponse que la réponse se poursuit sur l'espace supplémentaire.

Notations :

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes.
- $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p .
- $\text{GL}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et 0_p la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- ${}^t A$ la matrice transposée de A .
- Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\text{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A et $\det(A)$ désigne le déterminant de A .
- \mathcal{B}_c la base canonique de \mathbb{K}^p et id_p l'endomorphisme identité de \mathbb{K}^p .

Rappels sur la convergence d'une suite de matrices :

Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Par définition, si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = L \iff \|A_n - L\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On peut aussi caractériser la limite de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les limites de ses coefficients, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = L \iff \forall 1 \leq i \leq p, \forall 1 \leq j \leq q, \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n[i, j] = L[i, j],$$

avec $A_n[i, j]$ désigne le coefficient de A_n situé à la i -ème ligne et à la j -ème colonne.

Rappelons aussi que l'application bilinéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

est continue sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Donc pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et toute suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = L \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = L' \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n B_n = LL'.$$

Problème I

Objectif : Le but de ce problème est d'établir une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ pour que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Partie A : Étude d'un exemple

Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Q.1 ▷
- ▶ Sans faire de calculs déterminer $\det(M)$.
 - ▶ En déduire que 0 est une valeur propre de M et vérifier que $(1, 0, -1)$ est un vecteur propre qui lui est associé.
 - ▶ Montrer que 1 est une valeur propre de M et que $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre qui lui est associé.
 - ▶ Montrer que $\frac{-1}{6}$ est une valeur propre de M et que $(9, 2, -12)$ est un vecteur propre qui lui est associé.

Q.2 ▷ Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer des matrices P et P^{-1} telles que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}\left(0, 1, \frac{-1}{6}\right)$.

- Q.3 ▷
- ▶ Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - ▶ Vérifier que la suite $(M^n)_{n \geq 1}$ converge vers la matrice L définie par :

$$L = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

▼ Une particule se déplace de manière aléatoire sur l'un des trois sommets A , B et C d'un triangle de la façon suivante :

- À l'étape $n = 0$, la particule se trouve au point A .
- Si à l'étape n , la particule se trouve en A , alors à l'étape suivante elle y reste en A ou elle se déplace vers C de façon équiprobable.
- Si à l'étape n , la particule se trouve en B , alors à l'étape suivante elle se trouve sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
- Si à l'étape n , la particule se trouve en C , alors à l'étape suivante elle se déplace vers B .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note respectivement A_n , B_n et C_n les événements «la particule se trouve en A à l'étape n », «la particule se trouve en B à l'étape n » et «la particule se trouve en C à l'étape n » et on note aussi $a_n = \mathbf{P}(A_n)$, $b_n = \mathbf{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbf{P}(C_n)$ leurs probabilités respectives.

- Q.4 ▷
- ▶ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n$.
 - ▶ Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

Q.5 ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le vecteur $X_n = (a_n \ b_n \ c_n) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

- ▶ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n \cdot M$ et déduire explicitement a_n , b_n et c_n .
- ▶ Calculer les limites de a_n , b_n et c_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Q.6 ▷ Soit Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de l'étape où la particule arrive au point C pour la première fois.

- ▶ Montrer que Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
- ▶ Calculer l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de Y .
- ▶ Calculer la probabilité de l'événement N : «la particule ne quitte jamais le point A ».

Partie B : Condition nécessaire

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose dans cette partie que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L . On note u l'endomorphisme de \mathbb{C}^p tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)$.

Q.7 ▷ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A .

- ▶ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, λ^n est une valeur propre de A^n .
- ▶ En déduire que $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.

Q.8 ▷ Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- ▶ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ▶ Préciser les valeurs propres de M . La condition établie dans la question Q.7 est-elle suffisante ?

Q.9 ▷ Soit $X \in \text{Ker}(A - I_p) \cap \text{Im}(A - I_p)$.

- ▶ Montrer qu'il existe $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{n+1}Y - A^nY = X.$$

- ▶ Déduire que $\text{Ker}(A - I_p) \cap \text{Im}(A - I_p) = \{0\}$.
- ▶ En déduire que $\mathbb{C}^p = \text{Ker}(u - id_p) \oplus \text{Im}(u - id_p)$.
- ▶ Montrer que $\text{Ker}(u - id_p)$ et $\text{Im}(u - id_p)$ sont stables par u .

Q.10 ▷ Notons u_1 et u_2 les endomorphismes induits par u sur $\text{Ker}(u - id_p)$ et $\text{Im}(u - id_p)$ respectivement.

- ▶ On suppose que $\text{Ker}(u - id_p) \neq \{0\}$. Identifier l'endomorphisme u_1 et préciser ses valeurs propres.
- ▶ On suppose que $\text{Im}(u - id_p) \neq \{0\}$. Montrer que toute valeur propre de u_2 est une valeur propre de u distincte de 1.

Problème II

Partie A.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

Q.16 ▷ Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} (\gamma_n - \gamma_{n-1})$ converge puis déduire que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ converge. On notera γ la limite de la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$.

Q.17 ▷ Montrer que la fonction $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q.18 ▷ ► Vérifier que pour tout $t > -1$, on a $\ln(1+t) \leq t$.

► En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, n[$, on a

$$0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq e \cdot e^{-t}.$$

Q.19 ▷ En utilisant le **théorème de convergence dominée**, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt.$$

Q.20 ▷ ► En intégrant par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt = \ln(n) - \int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} dt.$$

► En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt = -\gamma_n.$$

► Déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt$.

Partie B.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

Q.21 ▷ ► Justifier que f est bien définie.

► Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et donner, pour tout entier $n \geq 1$, l'expression de $f^{(n)}$ sous forme intégrale.

Q.22 ▷ Montrer que f est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 1$.

Q.23 ▷ ► Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.

► Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Q.24 ▷ ► Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $xf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{x^2}}} du$.

► Montrer, en utilisant le **théorème de convergence dominée**, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 1$ et déduire un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

Q.25 ▷ ► Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) - \frac{1}{x} = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{(1 + \sqrt{1+t^2})\sqrt{1+t^2}} dt.$$

► Dédurre que, pour tout $x > 0$, on a

$$x^3 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) = - \int_0^{+\infty} \frac{u^2 e^{-u}}{(1 + \sqrt{1 + \frac{u^2}{x^2}})\sqrt{1 + \frac{u^2}{x^2}}} du.$$

Q.26 ▷ Montrer alors que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

Q.27 ▷ ► En intégrant par parties, montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = x \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) dt.$$

► Montrer alors que, pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = -\ln(x) + \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln(u + \sqrt{x^2 + u^2}) du.$$

Q.28 ▷ ► Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln(u + \sqrt{x^2 + u^2}) du = \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln(2u) du.$$

► Dédurre que $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma + o(1)$.

Partie C.

On se propose de chercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(E) : \begin{cases} xy'' + y' + xy = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Q.29 ▷ ► Montrer que si $Y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E), alors $\begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = 1, \\ \forall n \geq 2, & a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}. \end{cases}$

► En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{cases} a_{2n} = 0, \\ a_{2n+1} = (-1)^n \left(\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \right)^2. \end{cases}$

► En déduire que (E) admet une unique solution sur \mathbb{R} qui est développable en série entière.

Q.30 ▷ ► Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t) dt = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

► En déduire une expression intégrale de Y .

★ Fin de l'épreuve ★