Q.33 ▷ Montrer que la fonction de répartition de L est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{2\arccos(x)}{\pi} & \text{si } x \in]0,\ 1[, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Q.34 ▷ On admet que, pour tout $x \in]0,\ 1[$, $\dfrac{d}{dx}(\arccos(x)) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_L(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,\ 1[, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$

Q.35 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_k(L) = E(L^k)$ existe.

Q.36 ▷ Par une intégration par parties, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_{k+2}(L) = \dfrac{k+1}{k+2} m_k(L)$.

Q.37 ▷ Déduire la variance $V(L)$ de L.

▼ On considère un échantillon $L_1,\ L_2, \ldots, L_n$ de taille $n \in \mathbb{N}^*$, de variables aléatoires indépendantes et de même loi que L. On pose $\overline{L}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k$.

Q.38 ▷ En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que

$$\forall \alpha > 0\,; \quad P\left(\left|\overline{L}_n - \frac{2}{\pi}\right| < \alpha\right) \geqslant 1 - \frac{1}{2n\alpha^2}.$$

Q.39 ▷ Trouver la valeur minimale de n pour que l'écart entre la moyenne empirique $\overline{L}_n$ et la moyenne théorique soit inférieur à 10^{-2} avec un niveau de confiance supérieur ou égale à 0,95.

▼ Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la même loi que Θ. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = \max\{X_0, X_1, \ldots, X_k\}$ et $V_k = \dfrac{2}{\pi}U_k$.

Q.40 ▷ Montrer que la fonction de répartition de U_k est donnée par

$$F_{U_k}(x) = (F_\Theta(x))^{k+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Q.41 ▷ En déduire la fonction densité f_{U_k} de la variable U_k.

Q.42 ▷ Montrer que la densité de V_k est donnée par $f_{V_k}(t) = \begin{cases} (k+1)t^k & \text{si } t \in]0,\ 1[, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$

Q.43 ▷ Montrer que $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-V_{2k}^2}}\right) = \dfrac{\pi}{2}(2k+1)m_{2k}(L)$.

Q.44 ▷ En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad E\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-V_{2k}^2}}\right) = \pi\dfrac{(2k+1)!}{2^{2k+1}(k!)^2}$.

⋆ **Fin de l'épreuve** ⋆

REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2024

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2024

Concours Biologie et Géologie
Épreuve de Mathématiques

Session 2024	Date : 29/05/2024	Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

L'usage d'une calculatrice **non programmable** est autorisé. L'usage de tout autre dispositif électronique est interdit.

Donnez vos réponses aux questions dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. Si vous avez besoin de plus d'espace pour une réponse, vous pouvez utiliser l'espace supplémentaire disponible à la fin des feuilles de réponses en précisant le numéro de la question et en indiquant dans l'espace réponse que la réponse se poursuit sur l'espace supplémentaire.

Exercice I

On note par $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et par I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique notée $\mathcal{B}_c = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ et du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

▼ On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}_c$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q.1 ▷ Vérifier que les réels 1 et 2 sont les valeurs propres de A.

Q.2 ▷ Calculer le rang de la matrice $(A - I_3)$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier la réponse.

Q.3 ▷ Vérifier que $\mathcal{B} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, avec

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Q.4 ▷ Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q.5 ▷ Écrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$. Quelle relation existe t-elle entre A et M ?

▼ On pose $N = M - D$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q.6 ▷ Vérifier que $N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et que $ND = DN$.

Q.7 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = D^n + nND^{n-1}$. En déduire M^n.

Q.8 ▷ Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, puis calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

▼ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1, \\ u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$

et on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Q.9 ▷ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. En déduire u_n en fonction de n.

▼ On considère l'endomorphisme $h = f + g$, où g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q.10 ▷ Déterminer la matrice Δ de l'endomorphisme h dans la base $\mathcal{B}$.

Q.11 ▷ Exprimer la matrice R de h dans la base $\mathcal{B}_c$ en fonction de Δ , P et P^{-1}.

Q.12 ▷ En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de h.

Q.13 ▷ Montrer que h est une projection qui n'est pas orthogonale.

▼ Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice Q dans la base $\mathcal{B}_c$ donnée par $P_1\Delta P_1^{-1}$, où P_1 est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}'' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}v_1', \frac{1}{\sqrt{3}}v_2', \frac{1}{\sqrt{2}}v_3'\right)$, avec

$$v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Q.14 ▷ Déterminer α et β pour que $\mathcal{B}' = (v_1', v_2', v_3')$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Q.15 ▷ Montrer que $P_1^{-1} = {}^tP_1$ puis déduire que Q est une matrice symétrique.

Q.16 ▷ Montrer que p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel que l'on précisera.

Q.17 ▷ Trouver P_2 en fonction de P et P_1 telle que $R = P_2QP_2^{-1}$. Que peut-on dire sur les endomorphismes p et h ?

Exercice II

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0,\ 1[$ et $q = 1 - p$.

▼ Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie par

$$(\mathscr{P}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = pq^n.$$

Q.18 ▷ Vérifier que $(\mathscr{P})$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

Q.19 ▷ Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

▼ Soit Y une variable aléatoire réelle discrète de même loi que X. On suppose que X et Y sont indépendantes.

Q.20 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X + Y = k) = (k+1)p^2q^k$.

Q.21 ▷ Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = n\}$ notée par $X/\{X + Y = n\}$.

▼ Soit $(T_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k = T_k\,T_{k+1}$ et on pose $M_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$.

Q.22 ▷ Calculer $P(S_k = 1)$. Déduire que la variable S_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p^2.

Q.23 ▷ Calculer la covariance du couple de variables aléatoires $(S_k,\ S_{k+1})$.
Les variables S_k et S_{k+1} sont-elles indépendantes ?

Q.24 ▷ Trouver l'espérance $E(M_n)$ et la variance $V(M_n)$ de M_n.

Q.25 ▷ Montrer que pour tout réel t strictement positif,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(p - t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqslant \frac{M_n}{n} \leqslant p + t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 2\Phi(t) - 1.$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Q.26 ▷ En admettant que $0 \leqslant p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$, vérifier que

$$\left[p - t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\ p + t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \subset \left[p - \frac{t}{2\sqrt{n}},\ p + \frac{t}{2\sqrt{n}}\right].$$

Q.27 ▷ Vérifier que $\frac{M_n}{n} \in \left[p - \frac{t}{2\sqrt{n}},\ p + \frac{t}{2\sqrt{n}}\right] \iff p \in \left[\frac{M_n}{n} - \frac{t}{2\sqrt{n}},\ \frac{M_n}{n} + \frac{t}{2\sqrt{n}}\right]$.

Q.28 ▷ Déduire un intervalle de confiance du paramètre p en fonction de n et de M_n avec un risque d'erreur inférieur à 2%. On donne $\Phi(2,325) = 0,99$.

▼ Un vétérinaire a été chargé de dépister, d'une manière indépendante, la présence d'un virus γ par un contrôle sanguin dans une grande ferme contenant 10000 bovins. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de bovins affectés par ce virus dans cette ferme.
On suppose que la probabilité qu'un bovin de cette ferme soit atteint par ce virus est $p \geqslant 0,2$.

Q.29 ▷ Déterminer la loi de Z.

Q.30 ▷ Par quelle loi peut-on approcher Z ? Préciser ses paramètres.

Q.31 ▷ On admet que Z et M_n ont même loi. Pour un échantillon de taille 250 de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que M_n, on a observé la moyenne empirique égale à 0,2.
À 98%, cette observation est-elle compatible avec $p = 0,4$?

Exercice III

▼ Soient Θ une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,\ \frac{\pi}{2}[$ et L une variable aléatoire définie par

$$L = \cos(\Theta).$$

Q.32 ▷ Donner l'espérance $E(\Theta)$, la variance $V(\Theta)$ et la fonction de répartition F_Θ de Θ.