



Concours Physique et Chimie
Epreuve de Physique

Date : 05 Juin 2023

Heure : 8 H00

Durée : 4 H

Nbre pages : 8

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte trois parties indépendantes.

Données	Formulaire Mathématique
<ul style="list-style-type: none"> Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8 \text{ ms}^{-1}$ Compressibilité isentropique de l'eau : $\chi_s = 4,3 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ Masse volumique de l'eau de mer : $\rho_0 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ Viscosité dynamique de l'eau de mer : $\eta = 10^{-3} \text{ Pl}$ Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ Masse molaire de l'ammoniac : $M_A = 17 \text{ g mol}^{-1}$ Rapport des capacités thermiques : $\gamma = c_p / c_v = 1,33$ 	<ul style="list-style-type: none"> $\text{div}(\text{grad } f) = \Delta f$ $\text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$ $\text{rot}(\text{rot } \vec{u}) = \text{grad}(\text{div } \vec{u}) - \Delta \vec{u}$ $\text{div}(f \vec{u}) = f \text{div } \vec{u} + \vec{u} \cdot \text{grad } f$

Première partie : Cartographie sur terre

Le Lidar, acronyme de (Light Detection and Ranging), est une technologie de mesure à distance utilisant un rayonnement laser. Il envoie des impulsions Laser rapides vers un objet, puis mesure le temps qu'il faut à ces impulsions pour rebondir sur l'objet et retourner au dispositif. Le Lidar peut déterminer la distance à l'objet avec une très grande précision.

Préliminaires : Ondes électromagnétiques dans le vide

On considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide dépourvu de charges et de courants. Le champ électrique de cette onde s'écrit en notation complexe :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \exp j(\omega t - kz) \vec{u}_y \quad \text{où } E_0 \text{ et } k \text{ sont des réels positifs.}$$

Q1. Quelle est la nature de cette onde et quelles sont ses propriétés ?

Q2. Écrire les équations de Maxwell sous leurs formes locales. Que deviennent ces équations dans le vide dépourvu de charges et de courants.

Q3. Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M,t)$ dans le vide dépourvu de charges et de courants. En déduire la relation de dispersion. Le vide est-il un milieu dispersif ? Justifier votre réponse.

Q15. Comparer cette célérité à celles des ondes acoustiques dans les gaz et dans les solides. Interpréter.

Q16. Montrer que l'écoulement de l'eau de l'océan est irrotationnel en présence de l'onde acoustique.

En déduire l'équation de propagation du champ de vitesse $\vec{v}(M,t)$.

Q17. Montrer qu'à partir des trois équations régissant l'écoulement du fluide, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e(M,t)) + \text{div}(\vec{\Pi}_a(M,t)) = 0 \quad \text{avec } \vec{\Pi}_a(M,t) = p(M,t) \vec{v}(M,t)$$

Où $e(M,t)$ est une grandeur dont on déterminera l'expression. Donner les significations physiques et les dimensions de $e(M,t)$ et $\vec{\Pi}_a(M,t)$.

Dans la suite, on considère une onde acoustique plane harmonique, de pulsation ω , se propageant dans l'eau de l'océan suivant une direction, de vecteur unitaire \vec{u} , tel que : $\vec{k} = \frac{\omega}{c_a} \vec{u}$.

Q18. Préciser le caractère transversal ou longitudinal des ondes acoustiques. Justifier votre réponse.

Q19. Donner l'expression de $p(M,t)$ associée à cette onde acoustique progressive. On note p_m son amplitude. Déterminer l'expression du champ de vitesse correspondant $\vec{v}(M,t)$. Que représente le coefficient de proportionnalité entre $p(M,t)$ et $\vec{v}(M,t)$?

Q20. Donner les expressions de $e(M,t)$ et de $\vec{\Pi}_a(M,t)$ pour l'onde acoustique plane progressive harmonique. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie acoustique.

Validité et discussion de certaines hypothèses adoptées

Les ondes acoustiques (sonores et ultrasonores) utilisées par les Sonars pour cartographier les fonds marins ou pour détecter les sous-marins ont des fréquences comprises entre 3 kHz et 300 kHz.

L'intensité acoustique I est définie par : $I = \langle \vec{\Pi}_a(M,t) \rangle$, où $\langle \vec{\Pi}_a(M,t) \rangle$ représente la valeur moyenne temporelle de $\vec{\Pi}_a(M,t)$. L'intensité acoustique exprimée en décibel est définie par :

$I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_{ref}} \right)$, où I_{ref} est l'intensité de référence ou seuil de l'audible associée à une surpression acoustique harmonique d'amplitude $p_{m,ref} = 10^{-6} \text{ Pa}$.

On cherche à vérifier à l'aide de quelques ordres de grandeurs la validité de certaines approximations adoptées. On considère une onde acoustique plane progressive harmonique de fréquence $f = 10 \text{ kHz}$ et d'intensité $I_{dB} = 100 \text{ dB}$.

Q21. Déterminer la valeur de l'amplitude p_m de la surpression acoustique associée à cette onde.

En déduire la valeur de l'amplitude μ_m de la perturbation de la masse volumique. Conclure à propos de l'hypothèse de l'acoustique linéaire.

Q22. Pour linéariser l'équation d'Euler, l'accélération convective est supposée négligeable par rapport à l'accélération locale. En déduire une condition imposée à la vitesse $v(M,t)$ pour laquelle cette approximation est valable. Evaluer l'amplitude v_m du champ de vitesses et la comparer à la célérité c_a de l'onde. Conclure.

Q4. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ en notation réelle. En déduire l'expression du vecteur de Poynting $\vec{I}(M,t)$ ainsi que sa valeur moyenne $\langle \vec{I}(M,t) \rangle$.

Quelle est la signification physique du flux de $\vec{I}(M,t)$ à travers une surface S ?

Lidar atmosphérique embarqué

Le Lidar atmosphérique peut être utilisé à bord d'un avion ou d'un ballon stratosphérique pour des applications telles que la mesure de la hauteur et de la structure des couches de nuages, la détermination de la densité et de la distribution de la pollution de l'air, la mesure de la vitesse et de la direction des vents et la reconnaissance des gaz atmosphériques tels que le dioxyde de carbone et le méthane.

La source Laser d'un Lidar à bord d'un avion, émet un faisceau laser de section S et de puissance moyenne surfacique ϕ_0 vers le sol (figure 1). La puissance du faisceau est atténuée sous l'effet de la diffusion atmosphérique. On note $\phi(z)$ la puissance moyenne surfacique du faisceau à la côte z . L'axe des z est orienté suivant la verticale descendante.

Une molécule de la couche atmosphérique située entre z et $z+dz$, excitée par le faisceau Laser, diffuse une puissance proportionnelle à la puissance moyenne surfacique du faisceau laser : $p_{diff} = \sigma(\omega)\phi(z)$ avec $\sigma(\omega)$ est une fonction de la pulsation ω et des caractéristiques de la molécule.

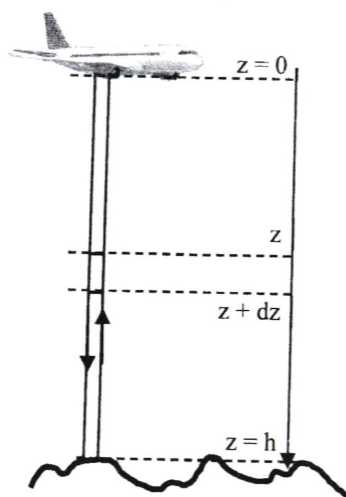


Figure 1

Q5. Montrer que la puissance moyenne diffusée par une couche de l'atmosphère située entre z et $z+dz$ et excitée par le faisceau Laser, s'écrit sous la forme : $d\mathcal{P}_{diff}(z) = n(z)\sigma(\omega)\phi(z)S dz$ où $n(z)$ est le nombre de molécules par unité de volume à la côte z .

Q6. En utilisant un bilan de puissance sur l'élément de volume de section S et situé entre z et $z+dz$:

- Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\phi(z)$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{d\phi(z)}{dz} = -\alpha(z)\phi(z) \text{ où } \alpha(z) \text{ est une fonction à déterminer.}$$

- En déduire que $\phi(z)$ s'écrit sous la forme : $\phi(z) = \phi_0 \exp\left(-\int_0^z \alpha(u) du\right)$.

Q7. Une impulsion Laser émise à l'instant t_0 et diffusée par une molécule située à la côte z est reçue par le Lidar à l'instant $t = t_0 + \Delta t$. Pour éviter la superposition des signaux dus aux différentes impulsions rediffusées par les molécules d'air au niveau de la surface du sol à la côte h , la durée entre deux impulsions successives est supérieure au temps nécessaire à une impulsion pour rebondir sur la surface du sol et retourner au dispositif.

- Quelle est la durée de propagation Δt de cette impulsion ? On suppose que la vitesse de propagation c est constante en tout point du milieu.
- Déterminer la fréquence maximale d'émission des impulsions pour que le Lidar puisse sonder l'atmosphère jusqu'à une altitude de 10 km.
- Le signal reçu à la date t par le Lidar a été diffusé par des molécules se trouvant dans un cylindre de volume $S \Delta z$. Calculer Δz sachant que le Lidar émet des impulsions de durée $t_\ell = 7 \text{ ns}$. Commenter.

Q8. La puissance rétrodiffusée par le volume $S \Delta z$ est proportionnelle à la puissance diffusée $\mathcal{P}_{diff}(z)$. Cette puissance rétrodiffusée retourne vers le détecteur de surface A en traversant à nouveau l'atmosphère. La puissance reçue par le détecteur est proportionnelle à la puissance diffusée $\mathcal{P}_{diff}(z)$ et à l'angle solide $\Omega = \frac{A}{z^2}$ sous lequel est vue la surface A du détecteur à partir du volume $S \Delta z$:

- Justifier que la puissance diffusée par le volume $S \Delta z$ sondé par l'impulsion laser et situé à la côte z , s'écrit sous la forme : $\mathcal{P}_{diff}(z) = \alpha(z)\phi(z)\Delta z$.
- Montrer que la puissance reçue par le détecteur s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{P}_{reçue} = K \phi_0 S c t_\ell \frac{A}{z^2} \alpha(z) \exp\left(-2\int_0^z \alpha(u) du\right); K \text{ est une constante.}$$

- Quelle est l'utilité du signal reçu par le détecteur.

Deuxième partie : Propagation des ondes acoustiques dans les milieux marins

Dans notre ère, les technologies de communications émergent dans un flux sans fin et sont constamment améliorées pour répondre aux besoins variés des industries et des applications. Les communications sous-marines sont cruciales pour de nombreuses applications, notamment la recherche océanique, la surveillance de la sécurité maritime ainsi que pour l'exploration pétrolière et gazière.

L'eau de l'océan est considérée comme un fluide homogène de compressibilité isentropique constante χ_s . Les champs de pression et de masse volumique caractérisant le fluide à l'équilibre sont supposés uniformes (P_0, ρ_0). La vitesse du fluide est supposée uniformément nul $\vec{V} = \vec{0}$ en tout point du milieu.

Les champs de pression $P(M,t)$, de masse volumique $\rho(M,t)$ et de vitesse $\vec{v}(M,t)$ sont perturbés par la présence d'une onde acoustique : $P(M,t) = P_0 + p(M,t)$ et $\rho(M,t) = \rho_0 + \mu(M,t)$.

Modèle de propagation des ondes acoustiques sans pertes

On suppose que l'écoulement du fluide est parfait et on se place dans le cadre de l'approximation de l'acoustique linéaire. On négligera l'effet du champ de pesanteur.

Q9. Donner l'approximation de l'acoustique linéaire.

Q10. Rappeler la définition d'un écoulement parfait et préciser les conséquences de cette hypothèse.

Q11. Rappeler l'équation d'Euler et déduire la relation linéarisée :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} = -\overline{\text{grad}} p(M,t) \quad (\text{éq I})$$

Q12. Les champs de masse volumique et de vitesse sont reliés par

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \text{div}(\rho(M,t)\vec{v}(M,t)) = 0.$$

Donner la signification physique de cette relation et effectuer sa linéarisation (éq II).

Q13. On rappelle que la compressibilité isentropique est décrite par le coefficient

$$\chi_s = \frac{1}{\rho(M,t)} \left(\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial p(M,t)} \right)_s. \text{ Etablir une relation linéaire (éq III) liant } \mu(M,t), p(M,t), \rho_0 \text{ et } \chi_s.$$

Q14. Etablir l'équation de propagation vérifiée par la perturbation $p(M,t)$. En déduire l'expression de la célérité c_a des ondes acoustiques. Calculer la valeur de c_a dans le cas où la propagation se produit dans l'eau.

Q45. Montrer que la fonction de partition Z s'écrit sous la forme : $Z = \frac{1}{2sh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$.

Q46. Montrer que l'énergie moyenne de l'oscillateur unidimensionnel est donnée par la relation $\langle E_{osc} \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$. Déterminer son expression.

Q47. Montrer que la capacité thermique molaire du solide cristallin s'écrit :

$$C_{v,m} = 3R \left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{1}{sh^2\left(\frac{u}{2}\right)}, \text{ où } u = \beta\hbar\omega$$

Q48. Etudier les limites de $C_{v,m}$ à basse et à haute température.

Définir une température θ_E , dite température d'Einstein, caractéristique du problème étudié.

Expliquer la différence entre $\theta_E(Cu)$ et $\theta_E(C)$ (Figure 5).

Q49. A très basse température, le modèle d'Einstein s'écarte légèrement des résultats expérimentaux. La figure 6 représente les résultats expérimentaux ainsi que ceux des modèles d'Einstein et de Debye donnant $C_{v,m}\left(\frac{T}{\theta}\right)$, θ étant la température caractéristique du matériau

relative au modèle considéré.

Proposer une explication de l'origine de cet écart. Comment peut-on y remédier ?



Figure 6

Q50. Sachant qu'en 1912, Debye a proposé un modèle quantique dans lequel l'énergie molaire du

cristal métallique est donnée par $U_m = \frac{3\pi^4}{5} R \frac{T^4}{\theta_D^3}$ pour des basses températures, où θ_D est la

température de Debye, déterminer la loi de variation de $C_{v,m}(T)$ lorsque $T \ll \theta_D$.

Commenter le résultat de ce modèle dans le cas de l'Aluminium (Figure 6).

Q26. Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$.

Préciser l'abscisse x_p de la frange brillante d'ordre p .

En déduire l'expression de l'interfrange ainsi que sa valeur numérique pour $\alpha = 5.10^{-4} \text{ rad}$ et $n_0 = 1,0003$.

Q27. On place le centre L de la lentille (L), de distance focale image $f' = 0,20 \text{ m}$, à une distance de $0,40 \text{ m}$ par rapport au centre O_2 du miroir (M_2).

A quelle distance doit-on placer la face d'entrée du récepteur d'image pour que O'_2 soit l'image de O_2 à travers (L) ?

En déduire le grandissement transversal correspondant. Quel est l'intérêt de ce choix ?

L'ailette de refroidissement, étudiée dans la première partie, est portée à une température constante et uniforme $T_a = 60^\circ\text{C}$, puis introduite dans le bras (OO_1) de l'interféromètre de Michelson dont la configuration est celle du coin d'air étudié dans les questions précédentes (Figure 3).

L'air surmontant l'ailette est assimilé à un gaz parfait sous la pression atmosphérique P_0 supposée constante. Ce milieu est le siège d'une variation de son indice de réfraction $n(z)$ sous l'effet du gradient de température $T(z)$.

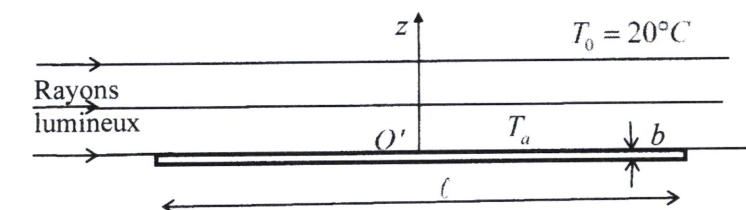


Figure 3

Q28. Déterminer la nouvelle différence de marche $\delta'(M)$.

Q29. En déduire l'abscisse de la frange d'ordre $p = 0$, puis celui de la frange brillante d'ordre p .

Les franges sont-elles de même forme que celles en absence de l'ailette ? Justifier votre réponse.

Q30. Le récepteur d'image de la figure 2 est relié à un système informatique permettant de déterminer $n_0 - n(z)$. Déterminer l'expression reliant $T(z)$ et $n_0 - n(z)$.

Q31. La figure 4 représente l'évolution donnant $\ln\left(\frac{T(z)-T_0}{T_a-T_0}\right)$ en fonction de z exprimée en

millimètre.

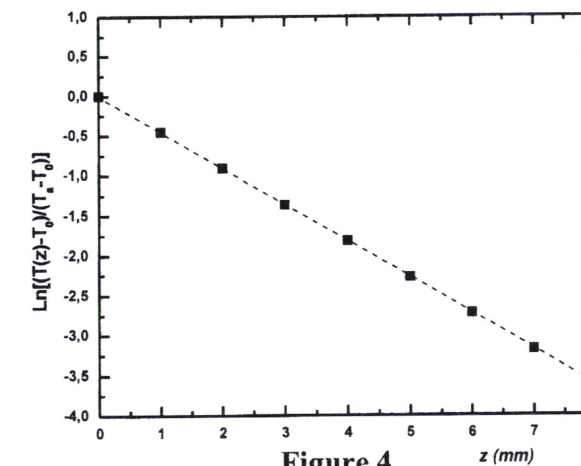


Figure 4

Déterminer la loi de variation de la température $T(z)$.

Préciser la distance caractéristique z_c de la variation de $T(z)$. Tracer son allure.

Q32. On suppose que le transfert conducto-convectif entre l'ailette et l'air se fait par conduction thermique à travers la couche d'air d'épaisseur z_c .

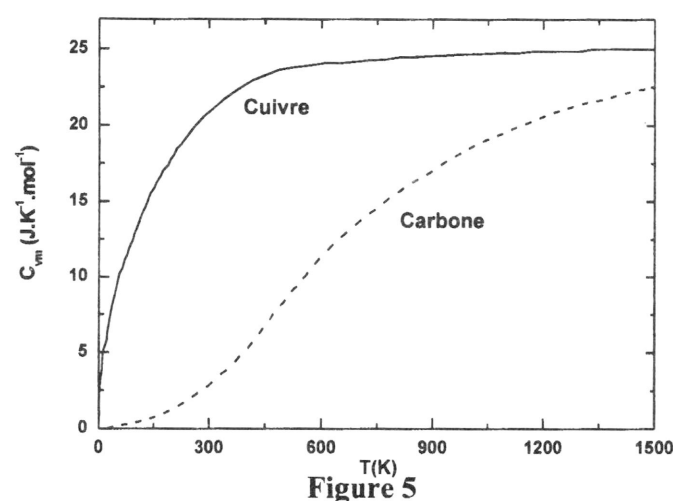
Déterminer l'expression de h en fonction de z_c et la conductivité thermique λ_a de l'air.

Calculer h pour $\lambda_a = 0,026 \text{ SI}$ et comparer sa valeur à celle proposée dans les données de l'épreuve.

Quatrième Partie : Capacité thermique des solides

Les échanges d'énergie thermique entre un solide cristallin et son environnement sont liés à sa capacité thermique à volume constant C_v , qui dépend de la température T . La **figure 5** donne la variation de la capacité thermique molaire expérimentale de $C_{vm}(T)$ pour le cuivre et le carbone.

On se propose d'étudier un modèle classique et un modèle quantique permettant de prévoir cette variation $C_{vm}(T)$. Pour cela, chaque atome indépendant du solide cristallin est représenté par trois oscillateurs harmoniques unidimensionnels indépendants. Un oscillateur harmonique unidimensionnel le long de l'axe (Ox) , par exemple, caractérise le mouvement d'un atome de masse m sur cet axe à la pulsation propre ω .



Q33. Interpréter les courbes de la figure 5.

Q34. Justifier le modèle de l'oscillateur harmonique adopté.

Modèle classique :

Le long de l'axe (Ox) , l'atome est modélisé par un oscillateur harmonique classique de position $x \in \mathbb{R}$ et de quantité de mouvement $p_x \in \mathbb{R}$.

Q35. Ecrire l'énergie mécanique $E = E(x, p_x)$ de cet atome. On prendra la position $x = 0$ comme origine de l'énergie potentielle.

On suppose que la probabilité de trouver l'atome dans l'état (x, p_x) , à $dx dp_x$ près, est donnée par la

loi de Boltzmann $dP = A e^{-\beta E} dx dp_x$, avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et A une constante.

Q36. Montrer que le terme βE peut s'écrire sous la forme : $\beta E = \xi_1^2 + \xi_2^2$

Donner les expressions des grandeurs ξ_1 et ξ_2 . Préciser leurs dimensions.

Q37. Déterminer la constante A en fonction de ω , k_B et T .

Q38. Déterminer les valeurs moyennes $\langle \xi_1^2 \rangle$ et $\langle \xi_2^2 \rangle$ associées aux grandeurs ξ_1 et ξ_2 .

Commenter le résultat.

En déduire l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ de l'atome le long de l'axe (Ox) .

La généralisation du résultat précédent constitue un théorème de base du modèle classique. Donner le nom et l'énoncé de ce théorème.

Q39. Dans le cas tridimensionnel, donner l'expression de l'énergie E_a d'un atome ainsi que sa valeur moyenne $\langle E_a \rangle$.

Q40. En déduire la capacité thermique molaire C_{vm} du cristal. Quelle loi empirique trouve-t-on ?

Q41. Commenter la validité du modèle classique.

Modèle quantique :

Dans ce modèle, proposé par Einstein en 1907, chaque atome indépendant est assimilé à un oscillateur harmonique en mécanique quantique.

Dans un problème unidimensionnel, on note $\Psi(x, t)$ la fonction d'onde complexe décrivant l'atome de masse m et de pulsation propre ω .

Q42. Rappeler l'interprétation de $\Psi(x, t)$.

Ecrire la condition de normalisation de $\Psi(x, t)$ et donner sa signification.

Q43. L'atome est caractérisé par une énergie potentielle $V(x)$. La fonction d'onde $\Psi(x, t)$ est solution de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t)$$

On cherche comme solution de cette équation, des états d'énergie stationnaire E sous la forme $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot \chi(t)$

Déterminer l'équation de Schrödinger indépendante du temps vérifiée par $\varphi(x)$.

Donner la forme générale de $\Psi(x, t)$ en fonction de $\varphi(x)$ et E .

La résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps montre que les énergies accessibles à l'oscillateur harmonique unidimensionnel sont quantifiées de la forme :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega, \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Q44. L'oscillateur harmonique est à l'équilibre thermique avec un thermostat de température T . Sans faire de calcul, donner l'énergie moyenne et la capacité thermique $C_v(T)$ de cet oscillateur dans le cas de basse température ($k_B T \ll \hbar \omega$) et le cas de haute température ($k_B T \gg \hbar \omega$).

La probabilité pour cet oscillateur d'être dans l'état d'énergie E_n est donnée par la loi de Boltzmann $p(E_n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$, où $Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}$ est sa fonction de partition.