

Q21. L'indice complexe peut se mettre sous la forme $\underline{n} = n' - i n''$. Dans le cas de l'air peu dense vérifiant $\omega_p \ll \omega_0$, montrer que :

$$n' = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \quad \text{et} \quad n'' = \frac{\frac{\omega}{\tau} \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}$$

Q22. Pour une onde électromagnétique du domaine visible, vérifiant la condition $\frac{1}{\tau} \ll \omega \ll \omega_0$, montrer que l'indice de réfraction de l'air, assimilé à un gaz parfait, vérifie la loi de Gladstone : $n(T, P) = 1 + a_0 \frac{P}{T}$, où P est la pression, T la température et a_0 une constante à déterminer.

Troisième Partie : Mesure optique du coefficient de convection

Un interféromètre de Michelson est constitué de deux miroirs plans (M_1) et (M_2) initialement orthogonaux l'un à l'autre et d'une lame semi-réfléchissante et non absorbante dite séparatrice (Sp) (Figure 2). Cette lame, inclinée de 45° par rapport aux normales à (M_1) et (M_2) n'introduit aucun déphasage supplémentaire. Le dispositif plonge dans l'air dont l'indice de réfraction est $n_0 = n(T_0, P_0)$ à la température $T_0 = 20^\circ C$ et à la pression $P_0 = 1 atm$.

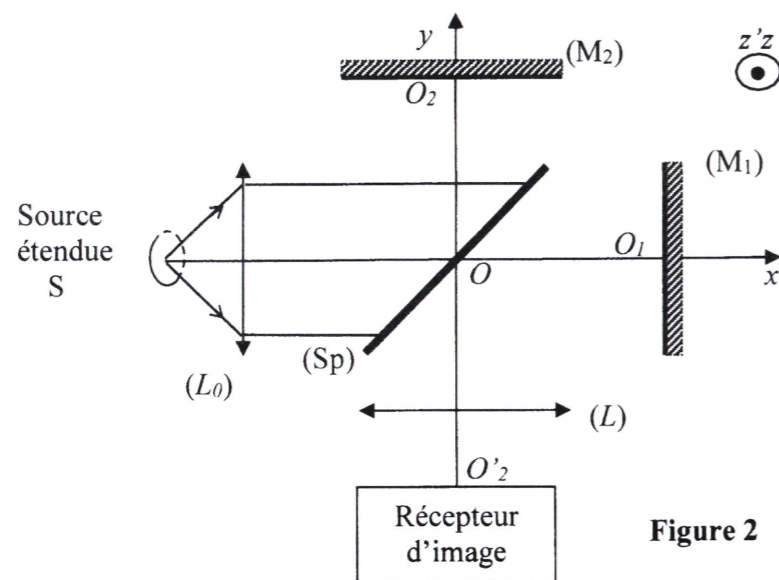


Figure 2

L'interféromètre de Michelson, se trouvant initialement en contact optique ($OO_1 = OO_2$), est éclairé par une source étendue S monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 546 nm$, placée au foyer objet d'une lentille convergente (L_0).

On fait tourner le miroir (M_2) autour de l'axe (O_2z) de sorte qu'il forme avec (M_1), image de (M_1) à travers (Sp), un dièdre d'arête (O_2z) et d'angle α faible (configuration « coin d'air »).

Q23. En utilisant le schéma équivalent du dispositif, faire une figure montrant les rayons qui interfèrent. Préciser le lieu de localisation des franges.

Q24. En prenant le point O_2 comme origine des abscisses, déterminer la différence de marche $\delta(M)$ entre les rayons qui interfèrent en un point M d'abscisse x .

Q25. Décrire brièvement la figure d'interférence observée.



Concours Mathématiques et Physique Epreuve de Physique

Date : 05 Juin 2023 Heure : 8 H00 Durée : 4 H Nbre pages : 08

- L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le candidat.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- L'épreuve comporte quatre parties pouvant être traitées de façon indépendante.

Données :

- Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} F.m^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$
- Conductivité thermique de l'Aluminium : $\lambda = 230 SI$
- Coefficient de Convection air - Aluminium : $h = 15 W.m^{-2}.K^{-1}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38.10^{-23} J.K^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$
- $ch(x-y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y)$
- $sh(x-y) = sh(x)ch(y) - ch(x)sh(y)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$
- On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$

Première Partie : Ailette de refroidissement

Dans les appareils électriques (générateurs, oscilloscopes...), l'évacuation de l'énergie thermique dégagée par les composants électroniques (transistors, régulateurs, ...) est un élément crucial pour éviter tout surchauffage causant leur dysfonctionnement. Pour cela, le boîtier du composant est monté sur un dissipateur thermique muni d'ailettes de refroidissement permettant un transfert conducto - convectif vers l'air ambiant.

Une ailette de refroidissement est modélisée par un solide homogène, de masse volumique μ , de capacité thermique massique c_m et de conductivité thermique λ , ayant la forme d'un parallélépipède de largeur a , de longueur ℓ et d'épaisseur b (Figure 1).

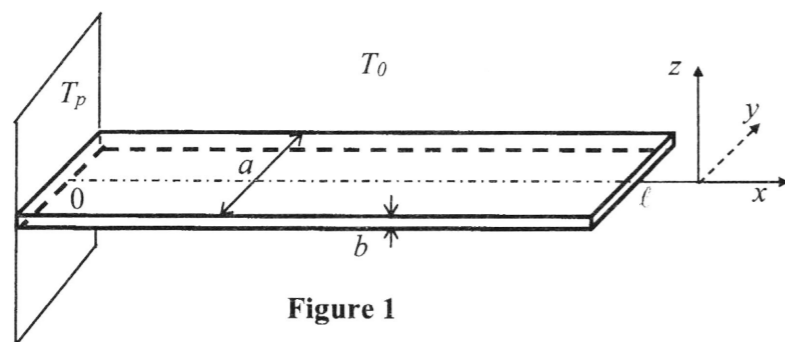


Figure 1

Cette ailette est en contact parfait par sa base $x=0$ avec la paroi du dissipateur de température uniforme et constante T_p . Le reste de sa surface est en contact avec l'air à la température constante T_0 . On suppose que la température locale de l'ailette ne dépend que de la variable spatiale x et du temps t : $T(M,t) = T(x,t)$.

Le flux surfacique du transfert convectif de l'ailette vers l'air est donné par la loi de Newton : $j_{cc} = h(T(M,t) - T_0)$, où h est le coefficient de convection.

Q1. Énoncer la loi de Fourier relative au phénomène de conduction thermique en précisant les conditions de sa validité et les unités des différents termes. On note \vec{j}_{th} le vecteur densité de flux thermique.

Q2. En faisant un bilan thermique sur une tranche comprise entre x et $x+dx$ de l'ailette, établir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mu c_m}{\lambda} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{(T(x,t) - T_0)}{\ell_c^2}$$

Exprimer ℓ_c en fonction des données.

Q3. Déterminer la dimension de ℓ_c et donner sa signification physique. Calculer sa valeur numérique dans le cas de l'aluminium. Commenter.
On prendra $a = 30 \text{ mm}$, $\ell = 60 \text{ mm}$ et $b = 2 \text{ mm}$.

Dans la suite, on suppose que le régime stationnaire est établi.

Q4. Préciser les conditions aux limites en $x=0$ et $x=\ell$.

Montrer que la température $T(x)$ dans l'ailette vérifie l'équation suivante :

$$\frac{T(x) - T_0}{T_p - T_0} = \frac{ch \left(\frac{\ell - x}{\ell_c} \right) + \frac{h\ell_c}{\lambda} sh \left(\frac{\ell - x}{\ell_c} \right)}{ch \left(\frac{\ell}{\ell_c} \right) + \frac{h\ell_c}{\lambda} sh \left(\frac{\ell}{\ell_c} \right)}$$

Q5. En justifiant votre réponse, comparer la puissance totale évacuée par l'ailette dans l'air $\mathcal{P}_{ailette \rightarrow air}$ à celle transférée par la paroi du dissipateur vers l'ailette $\mathcal{P}_{paroi \rightarrow ailette}$.

Déterminer la puissance thermique totale \mathcal{P}_{th} évacuée par l'ailette dans l'air.

Q6. En déduire l'expression de la résistance thermique R_{th} de l'ailette définie par $R_{th} = \frac{T_p - T_0}{\mathcal{P}_{th}}$.

Q7. Donner et interpréter l'expression de R_{th} dans les cas où $\ell \gg \ell_c$ et $\ell \ll \ell_c$.

Q8. Déterminer la puissance thermique $\mathcal{P}_{th,0}$ évacuée par la surface $S = ab$ de la paroi du dissipateur dans l'air, en absence de l'ailette.

Q9. Définir l'efficacité η de l'ailette et donner son expression en fonction des données du problème.

Q10. Calculer la valeur de η . Commenter.

Calculer sa valeur limite η_{lim} dans le cas où $\ell \gg \ell_c$. Conclure.

Le coefficient h du transfert convectif est lié à la variation de la température de l'air en contact avec l'ailette. Cette variation entraîne une modification de son indice de réfraction.

Deuxième Partie : Effet de la température sur l'indice de l'air

L'étude concerne une onde électromagnétique du domaine visible supposée plane progressive monochromatique de champ électrique $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \underline{k}x)$ en interaction avec l'air assimilée à un diélectrique linéaire, homogène, isotrope et non magnétique comportant N_v molécules par unité de volume. En l'absence du champ électromagnétique, chaque molécule d'air, formée de deux atomes, possède un moment dipolaire électrique nul.

Dans cette étude, on adopte le modèle de l'électron élastiquement lié pour lequel chaque atome comporte un électron mobile non relativiste de masse m_e , de charge $q = -e$, de vecteur déplacement $\vec{r}(t) = \overline{OM}(t)$ et de vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ dans le référentiel galiléen de centre O , lié au noyau. Dans le cadre de ce modèle, l'électron est supposé soumis à une force de rappel élastique $\vec{F}_{rap} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}$ et une force d'amortissement fluide $\vec{F}_{am} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$, où ω_0 et τ sont des constantes positives.

Q11. Expliquer brièvement l'origine physique des forces \vec{F}_{rap} et \vec{F}_{am} .

Q12. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{r}(t)$.

Q13. Simplifier cette équation en menant certaines approximations à justifier.

Q14. En régime sinusoïdal forcé, montrer que le vecteur vitesse d'un électron s'écrit, en notation

$$\text{complexe } \underline{v}(t) = \frac{-ie\omega}{m_e \left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau} \right)} \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$$

Q15. Déterminer le vecteur densité volumique de courant électronique \underline{J} .

Q16. En déduire l'expression de la conductivité complexe $\underline{\gamma}(\omega)$ de l'air définie par $\underline{J} = \underline{\gamma} \underline{E}$.

Étudier les cas limites de $\underline{\gamma}(\omega)$ et préciser sa valeur maximale γ_0 .

Q17. Écrire les équations de Maxwell dans l'air.

Q18. Montrer que le champ électrique de l'onde électromagnétique vérifie l'équation de

$$\text{propagation suivante : } \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

Q19. En déduire la relation de dispersion reliant \underline{k}^2 et ω .

Q20. L'indice complexe \underline{n} du milieu est défini par $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \underline{n}^2$, avec $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$. Montrer que

$$\underline{n}^2 = 1 + \frac{2\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}}, \text{ où } \omega_p \text{ est une pulsation caractéristique du milieu que l'on déterminera.}$$

Q45. Montrer que la fonction de partition Z s'écrit sous la forme : $Z = \frac{1}{2sh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$.

Q46. Montrer que l'énergie moyenne de l'oscillateur unidimensionnel est donnée par la relation $\langle E_{osc} \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$. Déterminer son expression.

Q47. Montrer que la capacité thermique molaire du solide cristallin s'écrit :

$$C_{v,m} = 3R \left(\frac{u}{2}\right)^2 \frac{1}{sh^2\left(\frac{u}{2}\right)}, \text{ où } u = \beta\hbar\omega$$

Q48. Etudier les limites de $C_{v,m}$ à basse et à haute température.

Définir une température θ_E , dite température d'Einstein, caractéristique du problème étudié.

Expliquer la différence entre $\theta_E(Cu)$ et $\theta_E(C)$ (Figure 5).

Q49. A très basse température, le modèle d'Einstein s'écarte légèrement des résultats expérimentaux. La figure 6 représente les résultats expérimentaux ainsi que ceux des modèles d'Einstein et de Debye donnant $C_{v,m}\left(\frac{T}{\theta}\right)$, θ étant la température caractéristique du matériau relative au modèle considéré.

Proposer une explication de l'origine de cet écart. Comment peut-on y remédier ?

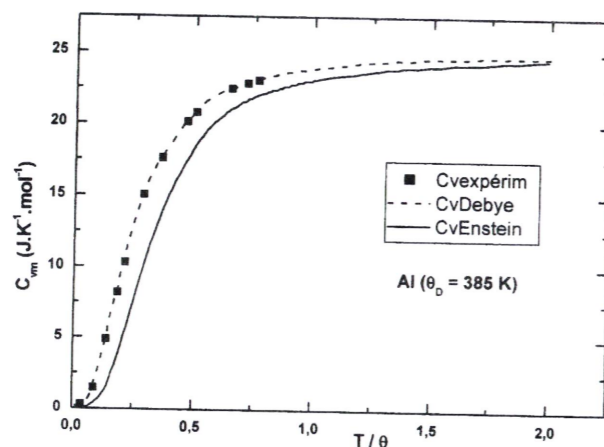


Figure 6

Q50. Sachant qu'en 1912, Debye a proposé un modèle quantique dans lequel l'énergie molaire du cristal métallique est donnée par $U_m = \frac{3\pi^4}{5} R \frac{T^4}{\theta_D^3}$ pour des basses températures, où θ_D est la température de Debye, déterminer la loi de variation de $C_{v,m}(T)$ lorsque $T \ll \theta_D$. Commenter le résultat de ce modèle dans le cas de l'Aluminium (Figure 6).

Q26. Donner l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$.

Préciser l'abscisse x_p de la frange brillante d'ordre p .

En déduire l'expression de l'interfrange ainsi que sa valeur numérique pour $\alpha = 5.10^{-4} \text{ rad}$ et $n_0 = 1,0003$.

Q27. On place le centre L de la lentille (L), de distance focale image $f' = 0,20 \text{ m}$, à une distance de $0,40 \text{ m}$ par rapport au centre O_2 du miroir (M_2).

A quelle distance doit-on placer la face d'entrée du récepteur d'image pour que O'_2 soit l'image de O_2 à travers (L) ?

En déduire le grandissement transversal correspondant. Quel est l'intérêt de ce choix ?

L'ailette de refroidissement, étudiée dans la première partie, est portée à une température constante et uniforme $T_a = 60^\circ\text{C}$, puis introduite dans le bras (OO_1) de l'interféromètre de Michelson dont la configuration est celle du coin d'air étudié dans les questions précédentes (Figure 3).

L'air surmontant l'ailette est assimilé à un gaz parfait sous la pression atmosphérique P_0 supposée constante. Ce milieu est le siège d'une variation de son indice de réfraction $n(z)$ sous l'effet du gradient de température $T(z)$.

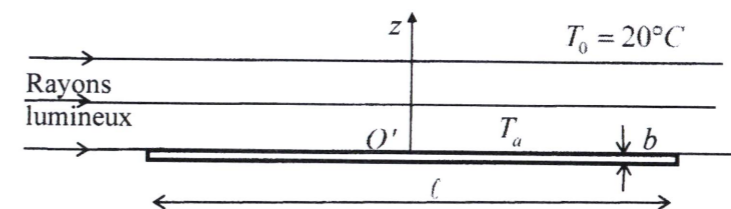


Figure 3

Q28. Déterminer la nouvelle différence de marche $\delta'(M)$.

Q29. En déduire l'abscisse de la frange d'ordre $p = 0$, puis celui de la frange brillante d'ordre p . Les franges sont-elles de même forme que celles en absence de l'ailette ? Justifier votre réponse.

Q30. Le récepteur d'image de la figure 2 est relié à un système informatique permettant de déterminer $n_0 - n(z)$. Déterminer l'expression reliant $T(z)$ et $n_0 - n(z)$.

Q31. La figure 4 représente l'évolution donnant $\ln\left(\frac{T(z)-T_0}{T_a-T_0}\right)$ en fonction de z exprimée en millimètre.

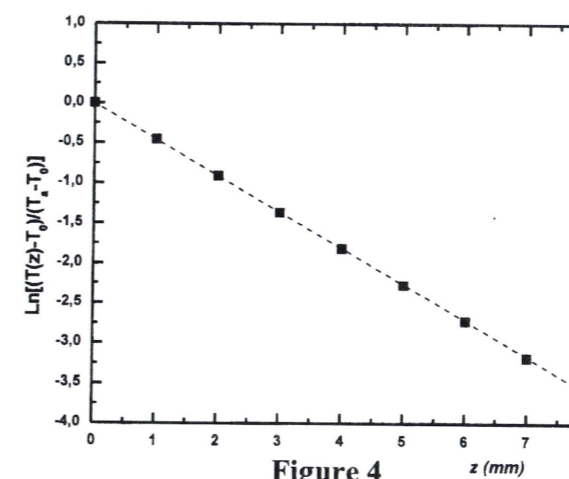


Figure 4

Déterminer la loi de variation de la température $T(z)$.

Préciser la distance caractéristique z_c de la variation de $T(z)$. Tracer son allure.

Q32. On suppose que le transfert conducto-convectif entre l'ailette et l'air se fait par conduction thermique à travers la couche d'air d'épaisseur z_c .

Déterminer l'expression de h en fonction de z_c et la conductivité thermique λ_a de l'air.

Calculer h pour $\lambda_a = 0,026 \text{ SI}$ et comparer sa valeur à celle proposée dans les données de l'épreuve.

Quatrième Partie : Capacité thermique des solides

Les échanges d'énergie thermique entre un solide cristallin et son environnement sont liés à sa capacité thermique à volume constant C_v qui dépend de la température T . La **figure 5** donne la variation de la capacité thermique molaire expérimentale de $C_{vm}(T)$ pour le cuivre et le carbone.

On se propose d'étudier un modèle classique et un modèle quantique permettant de prévoir cette variation $C_{vm}(T)$. Pour cela, chaque atome indépendant du solide cristallin est représenté par trois oscillateurs harmoniques unidimensionnels indépendants. Un oscillateur harmonique unidimensionnel le long de l'axe (Ox) , par exemple, caractérise le mouvement d'un atome de masse m sur cet axe à la pulsation propre ω .

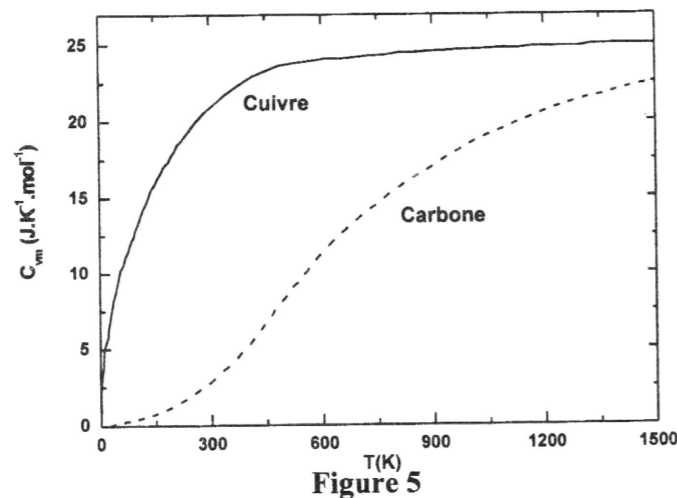


Figure 5

Q33. Interpréter les courbes de la figure 5.

Q34. Justifier le modèle de l'oscillateur harmonique adopté.

Modèle classique :

Le long de l'axe (Ox) , l'atome est modélisé par un oscillateur harmonique classique de position $x \in \mathbb{R}$ et de quantité de mouvement $p_x \in \mathbb{R}$.

Q35. Ecrire l'énergie mécanique $E = E(x, p_x)$ de cet atome. On prendra la position $x = 0$ comme origine de l'énergie potentielle.

On suppose que la probabilité de trouver l'atome dans l'état (x, p_x) , à $dx \cdot dp_x$ près, est donnée par la

loi de Boltzmann $dP = Ae^{-\beta E} dx dp_x$, avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et A une constante.

Q36. Montrer que le terme βE peut s'écrire sous la forme : $\beta E = \xi_1^2 + \xi_2^2$

Donner les expressions des grandeurs ξ_1 et ξ_2 . Préciser leurs dimensions.

Q37. Déterminer la constante A en fonction de ω , k_B et T .

Q38. Déterminer les valeurs moyennes $\langle \xi_1^2 \rangle$ et $\langle \xi_2^2 \rangle$ associées aux grandeurs ξ_1 et ξ_2 .

Commenter le résultat.

En déduire l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ de l'atome le long de l'axe (Ox) .

La généralisation du résultat précédent constitue un théorème de base du modèle classique. Donner le nom et l'énoncé de ce théorème.

Q39. Dans le cas tridimensionnel, donner l'expression de l'énergie E_a d'un atome ainsi que sa valeur moyenne $\langle E_a \rangle$.

Q40. En déduire la capacité thermique molaire C_{vm} du cristal. Quelle loi empirique trouve-t-on ?

Q41. Commenter la validité du modèle classique.

Modèle quantique :

Dans ce modèle, proposé par Einstein en 1907, chaque atome indépendant est assimilé à un oscillateur harmonique en mécanique quantique.

Dans un problème unidimensionnel, on note $\Psi(x, t)$ la fonction d'onde complexe décrivant l'atome de masse m et de pulsation propre ω .

Q42. Rappeler l'interprétation de $\Psi(x, t)$.

Ecrire la condition de normalisation de $\Psi(x, t)$ et donner sa signification.

Q43. L'atome est caractérisé par une énergie potentielle $V(x)$. La fonction d'onde $\Psi(x, t)$ est solution de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t)$$

On cherche comme solution de cette équation, des états d'énergie stationnaire E sous la forme $\Psi(x, t) = \underline{\varphi}(x) \cdot \underline{\chi}(t)$

Déterminer l'équation de Schrödinger indépendante du temps vérifiée par $\underline{\varphi}(x)$.

Donner la forme générale de $\Psi(x, t)$ en fonction de $\underline{\varphi}(x)$ et E .

La résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps montre que les énergies accessibles à l'oscillateur harmonique unidimensionnel sont quantifiées de la forme :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Q44. L'oscillateur harmonique est à l'équilibre thermique avec un thermostat de température T . Sans faire de calcul, donner l'énergie moyenne et la capacité thermique $C_v(T)$ de cet oscillateur dans le cas de basse température ($k_B T \ll \hbar\omega$) et le cas de haute température ($k_B T \gg \hbar\omega$).

La probabilité pour cet oscillateur d'être dans l'état d'énergie E_n est donnée par la loi de Boltzmann

$p(E_n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$, où $Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}$ est sa fonction de partition.