Q.29 ▷ En déduire que pour tout réel $a > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-at}\, dt = \frac{p!}{a^{p+1}}$.

Q.30 ▷ Vérifier que pour tout réel $t > 0$ on a : $\displaystyle\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$ et en utilisant le **théorème d'intégration terme à terme** déduire que, pour tout entier $p \geq 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1}\, dt = p!\zeta(p+1).$$

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\, dt$.

Q.31 ▷ Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que f est impaire.

Q.32 ▷ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. (On rappelle que $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.)

Q.33 ▷ Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on a

$$\frac{\sin(xt)}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!(e^t - 1)}.$$

Q.34 ▷ En utilisant le **théorème d'intégration terme à terme**, déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) x^{2n+1}$$

et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

Q.35 ▷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \sin(xt)e^{-nt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-nt}\, dt = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

Q.36 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}$.

Partie C

Q.37 ▷ En intégrant par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^{\pi} (\text{ch}(xt) - 1)\cos(nt)\, dt = (-1)^n \frac{x\,\text{sh}(\pi x)}{n^2 + x^2}.$$

Q.38 ▷ Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}$ pour tout $t \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Q.39 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x\,\text{sh}(\pi x)}{k^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\text{sh}(\pi x)}{2x} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\text{ch}(xt) - 1}{\sin(\frac{t}{2})} \sin((n+\tfrac{1}{2})t)\, dt.$$

Q.40 ▷ Montrer que la fonction $\psi : t \mapsto \dfrac{\text{ch}(xt) - 1}{\sin(\frac{t}{2})}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$, puis déduire à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \psi(t) \sin((n+\tfrac{1}{2})t)\, dt = 0.$$

REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2023

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2023

Concours Physique et Chimie & Technologie
Epreuve de Mathématiques

Session 2023	Date : 31/05/2023	Durée : 4 heures

Le sujet comporte deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

L'usage d'une calculatrice **non programmable** est autorisé. L'usage de tout autre dispositif électronique est interdit.

Notations

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\mathbf{det}(A)$ le déterminant de A.
- $\mathbf{Spec}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique défini par : $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ où $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ sont les composantes de x et y respectivement. On note aussi $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Problème I

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des vecteurs de E, on appelle **matrice de Gram** de la famille de vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée $\mathbf{Gram}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et définie par

$$\mathbf{Gram}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\langle x_i, x_j\rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{Gram}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \ldots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \ldots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \ldots & \langle x_n, x_n\rangle \end{pmatrix}.$$

On notera $\mathbf{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son déterminant.

Partie A : Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère $E = \mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire canonique et notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère les vecteurs :

$$x_1 = (2,-2,-1), \quad x_2 = (-1,1,-2) \quad \text{et} \quad x_3 = (1,1,2).$$

Q.1 ▷ Monter que (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q.2 ▷ Soit $M = \mathbf{Gram}(x_1, x_2, x_3)$, vérifier que :

$$M = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Q.3 ▷ Sans faire de calculs, prouver que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

▼ **Q.4** ▷ Montrer que le polynôme caractéristique de M est :

$$\mathrm{P}_M(X) = X^3 - 21X^2 + 120X - 100.$$

Q.5 ▷ Déterminer alors $\mathbf{det}(M)$. Que peut-on dire de la matrice M ?

Q.6 ▷ Montrer que $\mathbf{Spec}(M) = \{1, 10\}$.

▼ Soient E_1 et E_{10} les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 10 respectivement.

Q.7 ▷ Montrer que $E_{10} = \mathbf{Vect}\left((2,-2,1),(2,1,-2)\right)$ et que ces deux vecteurs forment une base orthogonale de E_{10}.

Q.8 ▷ Montrer que $E_1 = \mathbf{Vect}\left((1,2,2)\right)$.

Q.9 ▷ Déterminer une matrice orthogonale P telle que $M = PD\,{}^tP$ avec $D = \mathbf{diag}(1,10,10)$ la matrice diagonale formée par les valeurs propres de M.

▼ Soit $x = (1,1,0)$ et soient y et z ses projetés orthogonaux sur E_1 et E_{10} respectivement.

Q.10 ▷ Montrer que $y = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ puis déduire z.

Q.11 ▷ Calculer la distance de x à E_1 puis à E_{10}.

Partie B : Etude du cas général

Q.12 ▷ Montrer que si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée, alors $\mathbf{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

▼ On suppose que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre. Notons $F = \mathbf{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q.13 ▷ Montrer que $\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Q.14 ▷ En déduire que $\mathbf{Gram}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {}^tAA$.

Q.15 ▷ Déduire que $\mathbf{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$.

Q.16 ▷ Vérifier que $\mathbf{Gram}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et déduire que toutes les valeurs propres de $\mathbf{Gram}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont réelles et non nulles.

Q.17 ▷ Vérifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$${}^tX \cdot \mathbf{Gram}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot X = \| AX \|_2^2$$

et déduire que les valeurs propres de $\mathbf{Gram}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont strictement positives.

Q.18 ▷ En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbf{Spec}(\mathbf{Gram}(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, on a $\lambda < \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2$.

▼ On conserve les mêmes hypothèses et notations que celles données juste après la question **Q.12**. Soient $x \in E$ et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F.

Q.19 ▷ Justifier que $\| x \|^2 = \| p_F(x) \|^2 + \| x - p_F(x) \|^2$.

Q.20 ▷ Montrer que $\mathbf{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = \mathbf{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x - p_F(x))$.

Q.21 ▷ Montrer que $\mathbf{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x - p_F(x)) = \| x - p_F(x) \|^2 \cdot \mathbf{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ puis que

$$d(x, F) = \left(\frac{\mathbf{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{\mathbf{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec $d(x, F)$ désigne la distance de x au sous-espace F.

Q.22 ▷ Montrer alors par récurrence que $\mathbf{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \prod_{i=1}^{n} \| x_i \|^2$ avec égalité si, et seulement si, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille orthogonale.

▼ Application : Matrices de Hilbert

On pose $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $n \geq 1$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degrés inférieur ou égal à $n-1$ et on le munit du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt \quad \forall P, Q \in E.$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $P_i(X) = X^{i-1}$.

Q.23 ▷ Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Q.24 ▷ Calculer $\langle P_i, P_j \rangle$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Q.25 ▷ On appelle matrice de Hilbert d'ordre $n \geq 1$, la matrice $H_n = (h_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Déduire que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

Problème II

Partie A

Q.26 ▷ Soit ζ la fonction définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que ζ est continue, décroissante sur $]1, +\infty[$ et que $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$.

▼ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,dt$.

Q.27 ▷ Justifier que I_p existe pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Q.28 ▷ Ecrire I_{p+1} en fonction de I_p et déduire une expression simple de I_p.

Q.41 ▷ Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x}{n^2+x^2} = \frac{\pi}{2\operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}\cdot$

Q.42 ▷ En utilisant la question **Q.36**, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x}{n^2+x^2} = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x)\cdot$$

▼ On pose $\phi(x) = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi x)}{2\operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $\phi(0) = 0\cdot$

Q.43 ▷ Vérifier que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) = \frac{\pi}{2\operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}\cdot$$

Q.44 ▷ Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x)\cdot$

Q.45 ▷ Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \phi(x)\cdot$

Partie D

Q.46 ▷ En utilisant l'expression de f à l'aide de ϕ, vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$(f(x))^2 + \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Q.47 ▷ En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$(f(x))^2 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2}\zeta(2) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(n+\frac{3}{2}\right)\zeta(2n+2)x^{2n}\cdot$$

Q.48 ▷ En utilisant le **produit de Cauchy**, montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\zeta(2k+2)\zeta(2n-2k)\right)x^{2n}\cdot$$

Q.49 ▷ Déduire que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{n-1}\zeta(2k)\zeta(2n-2k)\cdot$$

Q.50 ▷ Vérifier que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ et $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

⋆ Fin de l'épreuve ⋆