Q.29 ▷ Sachant que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k) = \frac{2p}{1+p}\left(1-\frac{2p}{1+p}\right)^k.$$

▼ On considère une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ et $T = [Z]$ la partie entière de Z.

Q.30 ▷ Donner l'expression de la fonction de répartition de Z.

Q.31 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(T=k) = e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda}).$$

Q.32 ▷ Pour quelle valeur de λ, la variable aléatoire T suit-elle la même loi que X?

▼ On considère la variable aléatoire $U = Z - T$.

Q.33 ▷ Déterminer l'ensemble $U(\Omega)$ des valeurs prises par U.

Q.34 ▷ En utilisant le système complet d'évènements $(T=k)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0,1[, \qquad P(U \leq x) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}.$$

Q.35 ▷ En déduire une densité de U pour la valeur de λ trouvée dans la question **Q.32.**

▼ Une pompe à irrigation est utilisée dans un champ. Chaque jour, cette pompe a une probabilité égale à p de tomber en panne indépendamment des autres jours. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de jours de fonctionnement de la pompe avant sa première panne.

Q.36 ▷ Montrer que N suit une loi géométrique de paramètre p et que $N = Y + 1$.

Q.37 ▷ Déterminer $P(N > k)$ pour tout $k \geq 0$.

▼ Dans la suite on considère $(N_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes suivant la même loi que N avec N_i représente le nombre de jours de fonctionnement de la $i^{\text{ème}}$ pompe.

Soit $V = \min\limits_{1\leq i\leq m} N_i$.

Q.38 ▷ Déterminer l'expression de $P(V > k)$ pour tout $k \geq 0$.

Q.39 ▷ En déduire la loi de V.

Q.40 ▷ On suppose que $p = 0,01$. Dans un champ, on utilise 3 pompes pour l'irrigation. Au bout de combien de jours en moyenne se produira la première panne?

⋆ **Fin de l'épreuve** ⋆

Concours Biologie et Géologie
Epreuve de Mathématiques

Session 2023	Date : 31/05/2023	Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

L'usage d'une calculatrice **non programmable** est autorisé. L'usage de tout autre dispositif électronique est interdit.

Exercice I

- On note par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et par $\mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels.
- On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique notée $\mathcal{B}$ et du produit scalaire usuel noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
- On identifie $\mathbb{R}^3$ avec $\mathcal{M}_{(3,1)}(\mathbb{R})$ et on considère la matrice non nulle $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,1)}(\mathbb{R})$ et sa transposée ${}^tU = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(1,3)}(\mathbb{R})$.
- Le produit matriciel $U{}^tU \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- On note $\|U\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{{}^tUU}$.

On considère Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \frac{1}{\|U\|^2}U{}^tU$.

▼ **Q.1** ▷ Montrer que M est une matrice diagonalisable.

Q.2 ▷ Etablir que M est la matrice d'une projection orthogonale.

Q.3 ▷ En déduire les valeurs propres de M.

Q.4 ▷ Vérifier que le rang de M est égale à 1.

Q.5 ▷ En déduire l'ordre de multiplicité des valeurs propres de M.

▼ Dans la suite, on prend $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Q.6 ▷ Vérifier que $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q.7 ▷ Justifier que $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, avec

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2),$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme Φ.

Q.8 ▷ Donner une base orthonormale de $\mathrm{Im}(\Phi)$ et une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Q.9 ▷ Montrer que $\mathrm{Im}(\Phi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\}$.

Q.10 ▷ Donner les expressions de P, D et P^{-1} avec D est la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}'$ et P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Q.11 ▷ Soit ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Phi + \psi = id_{\mathbb{R}^3}$.
Démontrer que ψ est le projecteur orthogonale sur $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Ker}(\Phi)$.

▼ On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x,y) = (x+y-2)^2 + (-x+y+1)^2 + (2y+1)^2.$$

Q.12 ▷ Trouver $C \in \mathcal{M}_{(3,2)}(\mathbb{R})$, $W \in \mathcal{M}_{(2,1)}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{(3,1)}(\mathbb{R})$ tels que :

$$f(x,y) = \|CW - V\|^2.$$

Q.13 ▷ Justifier que $CW \in \mathrm{Im}(\psi)$.

Q.14 ▷ Trouver alors $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

Exercice II

Soient $\theta > 0$ un paramètre inconnu et U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [0,1]. Soit X une variable aléatoire définie par : $X = \theta U^2$.

▼ **Q.15** ▷ Rappeler la fonction de répartition de U.

Q.16 ▷ Calculer la fonction de répartition F_X de X.

Q.17 ▷ Justifier que X admet une densité f_X donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x\theta}} & \text{si } x \in]0,\theta], \\ 0 & \text{si } x \notin]0,\theta]. \end{cases}$$

Q.18 ▷ Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

Q.19 ▷ Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \max\{X_1, X_2\}$.

Q.20 ▷ On suppose que « La durée d'attente dans un cabinet de médecin (en minutes) » suit la loi de X. Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit inférieure à $\frac{\theta}{4}$ minutes.

▼ On observe un échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de taille n, où X_i est une variable aléatoire désignant la durée d'attente observée pour le $i^{\text{ème}}$ individu. On suppose que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi que X.

On définit une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 1}$ par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Q.21 ▷ Calculer l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$ de S_n.

Q.22 ▷ En utilisant le théorème de Bienaymé-Tchebychev, déduire la valeur minimale de n pour que : $P\left(|3S_n - n\theta| < n\sqrt{5V(X)}\right) \geq 0,99$.

Q.23 ▷ Donner alors un intervalle de confiance au risque au plus 0,01 de θ.

▼ On suppose dans la suite que $n \geq 30$.

Q.24 ▷ En utilisant le théorème central limite, trouver la valeur minimale de α pour que :

$$P\left(\left|\frac{S_n - \theta}{\sigma(S_n)}\right| \leq \alpha\right) \geq 0,99.$$

On donne $\Phi(2,58) = 0,995$.

Q.25 ▷ Déduire un intervalle de confiance de θ au risque au plus 0,01.

Q.26 ▷ Comparer les deux intervalles trouvés pour la valeur minimale trouvée dans la question **Q.22**.

Q.27 ▷ Le directeur d'un hôpital affirme que le temps d'attente d'un patient pour être servi est moins de 30 minutes. À l'aide d'un échantillon de 64 patients testés, on estime la durée d'attente moyenne à $\overline{x} = 31$ minutes, avec un écart-type 4 minutes. Peut-on affirmer, au risque 5%, que le directeur a tort ?
On donne $\Phi(1,64) = 0,95$.

Exercice III

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit $p \in]0,1[$.

▼ On suppose que la loi conjointe de X et Y est donnée par :

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} C_n^k\, p \left(\frac{1-p}{2}\right)^n & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q.28 ▷ Déterminer l'expression de la loi marginale de Y. On rappelle que $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.