

II-D On suppose maintenant que A et B admettent chacune une valeur propre double et une valeur propre simple.

On pose $\text{Sp}(A) = \{\alpha, \beta\}$ et $\text{Sp}(B) = \{\lambda, \mu\}$, où α est la valeur propre double de A et β sa valeur propre simple; λ est la valeur propre double de B et μ sa valeur propre simple.

Q.25 ▷ Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \text{diag}(\alpha, \alpha, \beta)$. On pose

$$A_1 = \frac{1}{\beta - \alpha} P^{-1} (A - \alpha I_3) P \quad \text{et} \quad B_1 = \frac{1}{\mu - \lambda} P^{-1} (B - \lambda I_3) P.$$

Q.26 ▷ Montrer que $A_1 = \text{diag}(0, 0, 1)$.

Q.27 ▷ Montrer que $(B_1)^2 = B_1$ et $\text{rg}(B_1) = 1$.

Q.28 ▷ Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $x A_1 + y B_1$ est diagonalisable. En déduire que $A_1 B_1 = B_1 A_1$.

Q.29 ▷ Montrer que $AB = BA$.

II-E On suppose ici que $A = \text{diag}(0, 0, 1)$ et que $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ vérifie $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$. On pose $\chi_B = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$, le polynôme caractéristique de B .

Q.30 ▷ Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par

$$\chi_{zA+B} = X^3 + (a_2 - z) X^2 + (a_1 + z(b_{11} + b_{22})) X + a_0.$$

▼ On suppose que $b_{11} + b_{22} = 0$.

Q.31 ▷ Montrer que si $a_1 = a_0 = 0$ alors $AB = BA$.

Indication : On pourra considérer la matrice $a_2 A + B$.

▼ On suppose que $a_1 \neq 0$ ou $a_0 \neq 0$.

Q.32 ▷ Montrer que $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale en z de degré strictement positif.

Indication : Utiliser le résultat de la question Q.8.

Q.33 ▷ En déduire qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 A + B$ admet une valeur propre multiple λ_0 .

Q.34 ▷ Montrer que $z_0 A + B$ commute avec A puis que $AB = BA$. On discutera suivant la multiplicité de la valeur propre λ_0 .

▼ On suppose que $b_{11} + b_{22} \neq 0$.

Q.35 ▷ Montrer que $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale en z de degré 4.

Q.36 ▷ En déduire qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 A + B$ admet une valeur propre multiple.

Q.37 ▷ Montrer que $z_0 A + B$ commute avec A puis que $AB = BA$.



Concours Mathématiques et Physique Épreuve de Mathématiques II

Session 2023	Date : 06/06/2023	Durée : 3 heures
--------------	-------------------	------------------

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pas été démontré.

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Notations

- \mathbb{K} désigne le corps des nombres réels \mathbb{R} ou le corps des nombres complexes \mathbb{C} .
- $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est la \mathbb{K} -algèbre des matrices carrées de taille 3 à coefficients dans \mathbb{K} .
- $GL_3(\mathbb{K})$ est le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique, $\text{Sp}(M)$ son spectre et $\text{rg}(M)$ son rang.
- Pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$, la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ sera notée $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.
- Une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est dite une matrice scalaire si $M = \alpha I_3$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $I_3 = \text{diag}(1, 1, 1)$ la matrice identité.

Partie I

I-A Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et f, g deux endomorphismes diagonalisables de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

Q.1 ▷ Montrer que les sous-espaces propres de g sont stables par f .

Q.2 ▷ Montrer que l'endomorphisme induit par f sur chaque sous-espace propre de g est diagonalisable.

Q.3 ▷ En déduire l'existence d'une base de E formée par des vecteurs propres communs à f et g .

I-B Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$. On considère le déterminant

$$D(P) = \begin{vmatrix} c & 0 & b & 0 & 0 \\ b & c & 2a & b & 0 \\ a & b & 3 & 2a & b \\ 1 & a & 0 & 3 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Q.4 ▷ On note $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$. Montrer que $D(P)$ est le déterminant dans la base \mathcal{B}_c de la famille (P, XP, P', XP', X^2P') , c'est-à-dire

$$D(P) = \det_{\mathcal{B}_c} (P, XP, P', XP', X^2P').$$

▼ On suppose ici que $D(P) = 0$.

Q.5 ▷ Justifier que la famille (P, XP, P', XP', X^2P') est liée.

Q.6 ▷ En déduire qu'il existe $U, V \in \mathbb{C}[X]$ non nuls tels que $\deg U \leq 1$, $\deg V \leq 2$ et $UP + VP' = 0$.

Q.7 ▷ Montrer que P admet une racine multiple.

Q.8 ▷ Montrer que

$$D(P) = 4a^3c - 18abc + 4b^3 - a^2b^2 + 27c^2.$$

I-C On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q.9 ▷ A-t-on $AB = BA$?

Q.10 ▷ Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de $zA + B$ est

$$\chi_{zA+B} = X(X - (2+z))(X - (3+2z)).$$

Q.11 ▷ Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -\frac{3}{2}, -2\}$. Montrer que $zA + B$ est diagonalisable.

Q.12 ▷ Montrer que $-A + B$ n'est pas diagonalisable.

I-D Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ deux matrices diagonalisables.

Q.13 ▷ Montrer que

$$AB = BA \iff \exists P \in GL_3(\mathbb{C}) \text{ telle que } P^{-1}AP \text{ et } P^{-1}BP \text{ soient diagonales.}$$

Q.14 ▷ Montrer que si $AB = BA$ alors $A + B$ est diagonalisable. Que peut-on dire de la réciproque?

Q.15 ▷ Montrer que si $AB = BA$ alors, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, la matrice $xA + yB$ est diagonalisable.

Partie II

Dans toute cette partie on considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, la matrice $xA + yB$ soit diagonalisable et on se propose de montrer que $AB = BA$.

II-A On suppose qu'il existe $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$ non tous deux nuls tels que $x_0A + y_0B$ admet une valeur propre triple.

Q.16 ▷ Montrer que $x_0A + y_0B$ est une matrice scalaire.

Q.17 ▷ En déduire que $AB = BA$.

II-B On suppose que $A = \text{diag}(0, 0, 1)$ et que $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$.

Q.18 ▷ Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par

$$\chi_{zA+B} = \chi_B - zX^2 + z(b_{11} + b_{22})X - z(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}),$$

où χ_B est le polynôme caractéristique de B .

II-C On suppose que $A = \text{diag}(0, 0, 1)$ et que $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ vérifie $\text{rg}(B) = 1$ et $B^2 = B$.

Q.19 ▷ Montrer que $\chi_B = X^3 - X^2$ et que $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$.

Q.20 ▷ En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par

$$\chi_{zA+B} = X(X^2 - (z+1)X + (b_{11} + b_{22})z).$$

Q.21 ▷ Montrer que si $b_{11} + b_{22} = 0$ alors $AB = BA$.

Indication : On pourra remarquer que $\chi_{-A+B} = X^3$.

▼ On suppose que $b_{11} + b_{22} \neq 0$.

Q.22 ▷ Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $z_0A + B$ admette une valeur propre double $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$.

Q.23 ▷ Montrer que $\text{rg}(z_0A + B - \lambda_0 I_3) = 1$.

Q.24 ▷ En déduire que $b_{13} = b_{23} = b_{31} = b_{32} = 0$ puis que $AB = BA$.

II-F On suppose que A admet une valeur propre double α et une valeur propre simple β .

Q.38 \triangleright Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $\frac{1}{\beta-\alpha}P^{-1}(A - \alpha I_3)P = \text{diag}(0, 0, 1)$.

Q.39 \triangleright On pose $P^{-1}BP = (b'_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que

$$(b'_{11} - t)(b'_{22} - t) - b'_{12}b'_{21} = 0.$$

Q.40 \triangleright Montrer que $\text{diag}(0, 0, 1)$ et $P^{-1}BP - tI_3$ commutent. En déduire que $AB = BA$.

II-G On suppose ici que $A = \text{diag}(0, 1, u)$, avec $u \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$.

On admet qu'il existe $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique χ_{zA+B} de la matrice $zA + B$ est donné par la formule

$$\chi_{zA+B} = X^3 - \varphi_2(z)X^2 + \varphi_1(z)X + \varphi_0(z),$$

où $\varphi_2(z) = (u+1)z + b_1$, $\varphi_1(z) = uz^2 + b_2z + b_3$ et $\varphi_0(z) = b_4z^2 + b_5z + b_6$.

Q.41 \triangleright Montrer que $D(\chi_{zA+B})$ est une fonction polynomiale de degré 6 en z .

Q.42 \triangleright Montrer alors qu'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $z_1A + B$ admet une valeur propre multiple.

Q.43 \triangleright Montrer que $z_1A + B$ commute avec A . En déduire que $AB = BA$.

II-H

Q.44 \triangleright En distinguant les trois cas suivants :

- A ou B admet une valeur propre triple;
- A et B admettent chacune une valeur propre double et une valeur propre simple;
- A ou B admet 3 valeurs propres simples,

montrer que $AB = BA$.

Partie III

Q.45 \triangleright Soient $A, B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $xA + yB$ est diagonalisable.

Q.46 \triangleright Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, la matrice $xA + yB$ soit diagonalisable. A-t-on $AB = BA$? Justifier votre réponse.

★ Fin de l'épreuve ★