Q.18 $\triangleright$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$. Justifier l'inégalité suivante :

$$\left| e^{-2x} - e^{-x} A_n(x) \right| \leq \frac{x^n e^{-x}}{n!}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Q.19 $\triangleright$ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x^n e^{-x} \leq n^n e^{-n}$. En déduire que $e_2 \in \overline{\mathcal{D}}$.

Soit n un entier ≥ 2 tel que $e_n \in \overline{\mathcal{D}}$. On se propose de démontrer que $e_{n+1} \in \overline{\mathcal{D}}$. On fixe $\varepsilon > 0$, il résulte de la question **Q.18** qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}$ vérifiant

$$\left| e^{-2y} - e^{-y} P(y) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{pour tout } y \geq 0.$$

On pose $M = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |e^{-x} P(x)|$.

Q.20 $\triangleright$ Justifier qu'il existe un polynôme B_n vérifiant

$$\left| e^{-(n+1)x} - e^{-nx/2} e^{-x/2} B_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Q.21 $\triangleright$ Montrer qu'il existe un polynôme Q vérifiant

$$\left| e^{-nx/2} - e^{-x/2} Q(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2M+1} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

Indication : Remarquer que $e_n \in \overline{\mathcal{D}}$.

Q.22 $\triangleright$ En déduire qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}$ tel que $\left| e^{-(n+1)x} - \varphi(x) \right| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et conclure que $e_{n+1} \in \overline{\mathcal{D}}$.

Q.23 $\triangleright$ Monter alors que $\mathcal{D}$ est dense dans $C_0(\mathbb{R}^+)$.

Partie IV : Application à une marche aléatoire

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi définie par :

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et on prend $S_0 = 0$.

Q.24 $\triangleright$ Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

Q.25 $\triangleright$ Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$P\left(\left| \frac{S_n}{n} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

Q.26 $\triangleright$ Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$. En déduire que $P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Session 2023	**Date : 31/05/2023**	**Durée : 4 heures**

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling à l'aide d'un développement asymptotique d'une fonction intégrale et de donner quelques applications. ***Les parties III, IV et V sont indépendantes.***

On pourra utiliser les résultats suivants :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\text{Re}}(z)$.

Notations

- On note $C[0,1] = \{\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \ \varphi \text{ est continue}\}$ qu'on munit de la norme

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\varphi(t)|, \qquad \varphi \in C[0,1].$$

- On note $C_0(\mathbb{R}^+) = \{\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C} \text{ continue}, \ \lim_{+\infty} \varphi = 0\}$ qu'on munit de la norme

$$N_\infty(\varphi) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\varphi(t)|, \qquad \varphi \in C_0(\mathbb{R}^+).$$

- On désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions polynomiales. Par abus de language, la locution "fonction polynomiale" est parfois remplacée par polynôme.
- Si E est un espace vectoriel normé et F une partie de E, l'adhérence de F sera notée $\overline{F}$.

- On rappelle que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction génératrice G_X est définie par : $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\, t^n, \quad t \in [-1,1]$. Cette série converge pour tout nombre complexe z de module ≤ 1 et on peut donc définir

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\, z^n, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1.$$

Partie I : Préliminaires

Q.1 ▷ Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin x$ est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans la suite, on désigne par f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = e^{it} - 1 - it \quad \text{pour tout réel } t.$$

Q.2 ▷ Montrer qu'au voisinage de 0 on a : $f(t) \sim -\frac{t^2}{2}$.

Q.3 ▷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in \mathbb{R}$, $\left|e^{xf(t)}\right| = e^{-2x\sin^2(\frac{t}{2})}$.

Q.4 ▷ En déduire que pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [-\pi, \pi]$,

$$\left|e^{xf(t)}\right| \leq e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}}.$$

Q.5 ▷ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_X(e^{it})e^{-ikt}dt.$$

Q.6 ▷ Soit E un espace vectoriel normé et F est un sous espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est un sous espace vectoriel de E.

Partie II : Une preuve de la formule de Stirling

On désigne par Φ la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\Phi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{xf(t)}dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+,$$

où f est la fonction définie plus haut.

Q.7 ▷ Montrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et qu'elle vérifie

$$|\Phi(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2x\frac{t^2}{\pi^2}}dt, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

En déduire que $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^+)$.

On se propose de déterminer un équivalent de Φ en $+\infty$.

Q.8 ▷ Montrer que pour $x > 0$ on a :

$$\sqrt{x}\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_x(u)du, \quad \text{où} \quad h_x(u) = \begin{cases} e^{xf(\frac{u}{\sqrt{x}})} & \text{si } |u| < \sqrt{x}\pi, \\ 0 & \text{si } |u| \geq \sqrt{x}\pi. \end{cases}$$

Q.9 ▷ Montrer que pour tout réel u, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} h_x(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Q.10 ▷ En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\Phi(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

On se propose dans la suite de cette partie de démontrer la formule de Stirling. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$.

Q.11 ▷ Expliciter la fonction génératrice G_X de X.

Q.12 ▷ Montrer alors que : $\frac{n^n e^{-n}}{n!} = \frac{1}{2\pi}\Phi(n)$.

Q.13 ▷ En déduire la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$.

Partie III : Un exemple d'une partie dense

Soit $\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{C}[0,1] : g(0) = 0\}$ et on désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions polynomiales.

Q.14 ▷ Montrer que $\mathcal{F}$ est un hyperplan fermé de $\mathcal{C}[0,1]$.

Indication : On pourra utiliser l'application $g \longmapsto g(0)$.

On note $\mathcal{P}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \{f \in \mathcal{P} : f(0) = 0\}$ et on fixe $g \in \mathcal{F}$.

Q.15 ▷ Justifier qu'il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$.

En déduire que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $Q_n = P_n - P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers g sur $[0,1]$ et que $\overline{\mathcal{P}_0} = \mathcal{F}$.

On fixe $h \in C_0(\mathbb{R}^+)$ et on pose $g(t) = h(-\ln t), \quad t \in]0,1]$.

Q.16 ▷ Justifier que g se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, notée encore par g, et qui appartient à $\mathcal{F}$. Comparer $N_\infty(h)$ et $\|g\|_\infty$.

Q.17 ▷ En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(x \longmapsto e^{-x}P_n(e^{-x}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers h.

Soit $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de $C_0(\mathbb{R}^+)$ formé des fonctions de la forme $h(x) = e^{-x}P(x)$ où $P \in \mathcal{P}$. On souhaite montrer dans la suite que $\mathcal{D}$ est une partie dense de $C_0(\mathbb{R}^+)$. On pose $e_k(x) = e^{-kx}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad k \in \mathbb{N}^*$.

Q.27 ▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par α_n la probabilité conditionnelle $P\left(\left(\left|\frac{S_{2n}}{n}\right| > \varepsilon\right) | S_{2n} = 0\right)$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Dans la suite, on considère la série entière $\sum_{n\geq 0} P(S_{2n} = 0)x^{2n}$ et on désigne par H sa somme.

Q.28 ▷ Déterminer le rayon de convergence R de cette série. A-t-on convergence au point $x = R$?

Q.29 ▷ Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $\left(2n, \frac{1}{2}\right)$. Expliciter la fonction génératrice G_Y de Y.

Q.30 ▷ En utilisant la question **Q.5**, montrer que

$$P(S_{2n} = 0) = P(Y = n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(u)du.$$

Q.31 ▷ En déduire que, pour tout $x \in \left]-R, R\right[$,

$$H(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 - x^2\cos^2(u)}.$$

Q.32 ▷ Montrer que pour tout $x \in \left]-R, R\right[$,

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Partie V : Une Série de fonctions

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$ on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{\pi e^{-x}}{2n\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)}\right).$$

Q.33 ▷ Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-1} \ln\left(1 + \frac{\pi e^{-x}}{2k\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{2}{(n+1)\pi}\right).$$

Q.34 ▷ En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q.35 ▷ Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n!)(2n+1)!}\right)$.
En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

★ **Fin de l'épreuve** ★